Menú principal

Ejercicios para resolver

1. Una caja contiene 6 bombillas, de las cuales dos son defectuosa. Si la bombillas son probadas hasta encontrar una defectuosa, descríbase el espacio muestral del experimento.

2. Una moneda se lanza tres veces. Se pide:

    a) Construir el espacio muestral.

    b) Expresar en función de los sucesos elementales los siguientes sucesos:

    A= Los tres lanzamientos producen el mismo resultado.

    B= El mismo resultado aparece exactamente dos veces.

    C= Al menos dos veces sale cara.

    E= La cara aparece en el primero y en el segundo lanzamiento.

    D= Exactamente dos veces sale cara.

3. Sean A, B y C sucesos arbitrarios de un experimento aleatorio. Se consideran los siguientes sucesos:

E_1={al menos dos de los sucesos A, B, C ocurren}.

E_2={exactamente dos de los sucesos A, B, C ocurren}.

E_3={al menos uno de los sucesos A, B, C ocurre}.

E_4={exactamente uno de los sucesos A, B, C ocurre}.

E_5={no mas de dos sucesos A, B, C ocurren}.

Se pide:

Expresar E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 en función de A, B, C.

4. La siguiente tabla de mortalidad indica el número de supervivientes a varias edades, desde el nacimiento, de un grupo de cien mil varones españoles.

Edad X	**Supervivientes**
0	100000
10	96403
20	94682
30	92116
40	88376
50	82427
60	69516
70	48712
80	19 832
90	2612
100	60

Se pide:

Estimar la probabilidad de que un recién nacido alcance los sesenta años de edad.

b) Estimar la probabilidad de que una persona de veinte años viva hasta los cincuenta.

5. Un comerciante compra tres clases de yogur, A, B y C. Se sabe que el 20 por 100, 30 por 100 y 50 por 100, respectivamente, vienen en malas condiciones, y que de la marca A compra igual que de las otras dos juntas (supóngase que compra igual cantidad de B que de C). Si un cliente compra un yogur en ese comercio, ¿cuál es la probabilidad de que esté bueno? Si compró uno y resulté estar en malas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de A?

6. Siendo *A* y *B* sucesos tales que $P(A)=1/5$ y $P(B)=2/5$ e incompatibles entre sí. Hállese $P(A^{*}\cap B^{*})$.

7. Un lote de doce. artículos tiene cuatro defectuosos. Si se toman tres sin remplazo, hállese la probabilidad de que:

a) ninguno sea defectuoso;

b) alguno sea defectuoso.

8. Marcos y Enrique intervienen en un torneo de tenis. El primero que gane dos juegos consecutivos o complete tres, gana el torneo. Se pide:

a) Hallar los resultados posibles.

b) Si se considera que los dos jugadores tienen igual probabilidad de ganar cada juego, ¿cuál es la probabilidad de que Marcos gane al jugar el cuarto juego? *¿Y* de que gane Enrique en el quinto juego?

e) Si se considera que Marcos tiene una probabilidad de dos tercios de ganar cada juego, ¿cuál es la probabilidad de que gane Marcos el torneo.

9. Un banco tiene que elegir cinco cargos directivos: director, subdirector, interventor, cajero y cobrador, entre ocho personas, de las cuales tres son mujeres *(A, E, O)* y cinco hombres (X, *Y, Z, V, W).* Se pide de cuántas formas puede hacerse la elección si:

a) Las mujeres *A* y *E* no pueden estar las dos en la misma elección.

b) Entran las tres mujeres.

c) Entran tres hombres y dos mujeres.

10. Una mujer tiene cuatro amigos y ocho amigas y quiere invitar a cuatro de ellos a una fiesta. Se pide de cuántas formas puede hacerlo si:

a) Invita a una mujer y tres hombres.

b) Hay dos hombres que no pueden asistir juntos.

c) Un hombre y una mujer, si asisten, tienen que hacerlo juntos.

11. Un ascensor parte con siete personas y se detiene en diez pisos. Se pide de cuántas formas pueden bajarse:

a) En condiciones normales.

b) Si no lo hacen dos en el mismo piso.

c) Si no se baja nadie en ‘los dos primeros pisos.

d) Si dos personas determinadas se bajan en el mismo piso.

12. Probabilidad de que una mano de póker contenga cinco valores diferentes.

13. Sean dos urnas con la siguiente composición: urna *A:* tres bolas blancas y cinco bolas negras; urna *B:* dos bolas blancas y dos bolas negras. Se selecciona al azar una urna, se saca una bola, y si es blanca se coloca en la misma urna, y si es negra en la otra urna. Luego se coloca una bola de esta última urna donde se colocó esta bola. Hállese la probabilidad de que sean las dos del mismo color.

14. Una urna *A* contiene dos bolas blancas y una negra y otra urna *B* dos bolas negras y una blanca. Se toman dos bolas de cada una de las urnas sin remplazamiento y se meten en una urna *C.* Se pide: Calcular la probabilidad de que al tomar una bola de *C* sea blanca.

15. Un distribuidor de receptores de televisión acepta un embarque de quince receptores si una muestra con cuatro receptores no tiene ninguno defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que acepte el embarque si contiene tres receptores defectuosos?

16. Al tirar un dado doce veces, hállese la probabilidad de que salgan todos los números dos veces.

17. Si se arrojan cuatro monedas y dos dados, ¿cuántos resultados se pueden distinguir?

18. Un recién graduado solicita empleo en la compañía X y en otra compañía Y. Se estima que la probabilidad de ser contratado por X es 0,7 y la de serlo por Y es 0,5, en tanto que la probabilidad de que se rechace una de sus solicitudes, por lo menos, es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de ser contratado por una de las compañías por lo menos? Si es admitido por la compañía X, ¿cuál es la probabilidad de ser rechazado por la Y?

19. Considérese un dado cargado y que las probabilidades de cada cara son inversamente proporcional al número que aparece. En este caso se pide:

a) Probabilidad de que salga impar.

b) Probabilidad de que salga inferior a 4.

20. Se realiza la experiencia de elegir una ficha de dominó y observar el número «suma de puntos obtenidos». Diremos que se ha realizado el suceso A_i si la suma total de puntos en la ficha extraída fue *i.* Se pide:

a) ¿Cuáles son los valores que puede tomar *i?*

b) Describir el espacio muestral del experimento.

c) Digase si los sucesos A_0, A_3,, $A_2 \cup A_4$ son sucesos elementales o compuestos.

21. En el mismo problema anterior, sea B_j el suceso obtener una suma de puntos múltiplo de j. Se pide:

a) Describir los sucesos B_2, E_4, B_6, $E_4 \cap B_6$, $(B_2 \cap B_6)^*$, $A^*_3 \cup (B_4 \cap B_3)^*$, $A_{12} \cap B_6$.

b) Decir si son correctas las relaciones siguientes:

$B_2 \subset A_4$, $A_{12} \subset B_4 \cap B_6$,, $B_4 C B_2$, $B_4 \cap B_6 \subset B_2$, $B_2 U B_4 U B_6 = E$

22. Se lanzan dos dados al aire y se observan las puntuaciones obtenidas en sus caras superiores. Describir el espacio muestral en los siguientes casos:

a) Los dados son de distinto color.

b) Los dados son idénticos.

23. Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una blanca, una roja, una verde y una negra. Se pide describir el espacio muestral en los siguientes casos:

a) Se extraen las dos simultáneamente.

b) Se extrae una y sin volverla a remplazar, se extrae la otra.

c) Se extrae una, se vuelve a remplazar a la urna y a continuación se extrae la otra.

24. Tenemos un dado pintado del siguiente modo: 1, de blanco; 2, de negro; 3, 4, 5 y 6, de rojo. Al lanzarlo nos fijamos exclusivamente en el color obtenido en la cara superior. Se pide:

a) Describir el espacio muestral del experimento.

b) Comprobar si la familia de sucesos $\aleph$ es un álgebra:

$\aleph=\{ \phi,\{B\},\{N\},\{R\},\{N,R\}, \{B,R\},\{B,N\},E\}$

25. Sea el espacio muestral $E=\{ A, B, C, D, E \}$. Demostrar que la familia de sucesos dada por

$\aleph=\{ \phi,\{A,D,C\}, \{B\},\{B,E\},\{A,C,D,E\}\}$

no puede formar un álgebra. ¿Cómo habría que completarla para que lo fuera?

26. En un juego de cartas se distinguen cada una de estas cuatro opciones: as, *rey*, *caballo o sota* y *otra carta.* Se pide:

a) Describir el espacio muestral.

b) Asignar las probabilidades correspondientes a los sucesos elementales.

c) Asignar las probabilidades a los sucesos en estudio.

d) ¿Son los sucesos descritos en el problema equiprobables?

27. Se lanzan tres monedas al aire. Configurar el espacio muestral en los siguientes casos:

a) Las tres monedas son distintas.
b) Las tres monedas son idénticas.
c) Dos monedas son idénticas.

28. Cálculese la probabilidad $P(A\cap B)^*$ conocidas $P(A)=a$, $P(B)=b$ y $P(A\cup B)=c$.

29. Sean tres sucesos A, B y C definidos sobre una misma prueba. Se consideran los dos sucesos:

$$S_1=A^*\cap B^*\cap C \text{ y } S_2=(A\cup B)\cap C$$

Demuéstrese:

1) Que S_1, y S_2 son sucesos incompatibles.

2) Calcúlense las probabilidades de S_1, y S_2 sabiendo que

$P(A)=0,5;$ $P(B)=0,6;$ $P(C)=0,7;$ $P(A\cap B)=0,3;$

$P(A \cap C)=0,2$; $P(B \cap C)=O,1$; $P(A \cap B \cap C)=0,05$

30. En el jardinero del señor Rodríguez no se puede confiar. La probabilidad de que olvide regar el rosal durante la ausencia del señor Rodríguez es 2/3. El rosal está en un estado inseguro: si se le riega tiene igual probabilidad de progresar o de secarse, pero solamente un 0,25 de probabilidad de progresar si no se le riega. Después de su regreso, el señor Rodríguez se encuentra con que el rosal está seco. ¿Cuál es la probabilidad de que el jardinero no lo haya regado?

31. Una urna tiene tres bolas coloreadas: roja, azul y blanca. Dos bolas son extraídas aleatoriamente de la urna sin remplazar la primera antes de extraer la segunda. Sea *A* el suceso «la bola roja es seleccionada en la primera extracción», *B* el suceso «la bola roja es seleccionada en la segunda extracción», y *C* el suceso «la bola azul es seleccionada en la primera extracción». Determínese *P(A), P(B), P(C)* y *P(B/C).*

32. Una urna contiene tres bolas blancas y cuatro azules. Tres bolas son transferidas a una segunda urna. Una bola es seleccionada a continuación de la segunda urna y resulta ser blanca. Encuéntrese la probabilidad de extraer una bola azul entre las otras dos restantes.

33. Un barco cubre diariamente el servicio entre Ceuta y Algeciras. Sabemos que la probabilidad de accidente en día sin niebla es 0,005 y en día con niebla 0,08. Un cierto día de un mes que hubo dieciocho días sin niebla y doce con niebla se produjo un accidente. Calcúlese la probabilidad de que el accidente haya ocurrido:

a) En día sin niebla.
b) En día con niebla.

34. Determínese la probabilidad de que dos personas de un conjunto de r tengan el mismo cumpleaños, para r=5, 10, 15, 20, 23, 25, 30, 35.

35. Demuéstrese que

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

36. Demuéstrese que

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$$

37. Una moneda es lanzada cinco veces. Calcúlese la probabilidad de dos o más caras.

38. En una biblioteca se pide a sus usuarios coloquen en su lugar los libros prestados con objeto de disminuir personal en dicha biblioteca. Si un libro es tomado prestado de un estante de cincuenta, y colocado aleatoriamente, después de ser usado, en la misma estantería, ¿cuál es la probabilidad de ser colocado en el mismo lugar?. Si dos de los libros son colocados en lugares aleatorios en vez de uno, ¿cuál es la probabilidad de que ambos libros lo sean en el lugar correcto?

39. Si decimos que dos sucesos son independientes, ¿podemos concluir que son incompatibles?

40. Una moneda es lanzada dos veces. Sea *A* el suceso «cara en la primera tirada» y B el suceso «cara en la segunda tirada». Demuéstrese que *A* y B son independientes, pero no incompatibles.

41. Sean *A* y B dos sucesos tales que

P(A/B)=1/6, P(B)=1/2 y P(B/A)=1/4.

Encuéntrense *P(A)* y P(B).

42. Sean n células expuestas a radiación nociva. En esta situación los cromosomas se rompen en dos partes, una de las cuales contiene el centrómetro. Si se unen dos partes con centrómetro o dos sin centrómetro la célula se muere. Determínese la probabilidad de que después de unir la totalidad de las *2n* partes, a) queden en el orden original, y *b)* no muera ninguna célula.

43. En una mesa de juego, en 1654, MÉRÉ propuso a PASCAL la siguiente afirmación: «Es más probable obtener al menos un as con cuatro dados, que al menos un doble as en veinticuatro tiradas de dos dados. » Demuéstrese que MÉRÉ tenía razón.

44. Demuéstrese que si n>=2 es entero, entonces

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots = n2^{n-1}$$

46. El segundo problema propuesto por de Meré es el del reparto: A y han convenido en jugar un conjunto de partidas de un juego equitativo que ganará el primero que consiga 5 puntos. Cuando A ha ganado 4 puntos y B 3 deciden terminar y repartirse la puesta. ¿Cuánto debe recibir cada jugador?

De Meré proponía que el reparto se hiciera en la proporción 4:3

Probar que la proporción debe ser 3 : 1.

47. Un experimento consiste en obtener tres tornillos de una caja y clasificarlos en defectuosos o buenos. 1º) Escribir los sucesos posibles (espacio muestral). 2º) Escribir el suceso: "el primer tornillo fue defectuoso". 3º) Escribir el suceso 'ningún tornillo fue defectuoso".

48. Sean ***A, B, C,*** tres sucesos cualesquiera. Formar los siguientes sucesos a) Se realizan ***A*** y B pero no C. b) Se realiza al menos uno de los tres c) Se realizan al menos dos. d) No se realiza ninguno de los tres, e) realiza uno solo de los tres.

50. Se lanzan dos dados. Sea A el suceso 'la suma de los puntos es impar" y A el suceso "se ha obtenido al menos un 3". Describir los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cap B^*) \cup A^*$

51. Pedro y Juan son buenos jugadores de ping-pong. El primero tiene una probabilidad 0,6 de ganar una partida, y el segundo probabilidad 0,4. Cuál es la probabilidad de que gane Juan la mayoría de las partidas en un torneo de 3, 5, 7, partidas.

Solución:

a) Si designamos por 1 el ganar Juan y por 0 perder, los sucesos que dan la victoria a Juan son 111, 110, 101, 011. La probabilidad de este suceso es

$$0{,}4^3 + 3.0{,}4^2.0{,}6 = 0{,}352 \; .$$

b) En 5 partidas la probabilidad de ganar Juan es 0,31744;

c) en 7 partidas es 0,29.

52. Un canal binario simétrico transmite los dígitos 0 y 1. Se supone que hay una probabilidad 0.2 de que al transmitir uno de los números se reciba el otro, a causa del ruido o perturbación aleatoria. Supongamos que enviamos un mensaje importante y para transmitir 0, enviamos 000 y análogamente para 1 enviamos 111. a) Sí se supone que el receptor al traducir señal recibida utiliza la regla de la mayoría, ¿cuál es la probabilidad de que al traducir el mensaje sea erróneo ?.b) Si se supone que cuesta 1 peseta, enviar cada dígito y que una traducción errónea cuesta 1.000 ptas. ¿Cuántos dígitos debían enviarse para hacer un mínimo el coste?

Solución

a) $0{,}2^3 + 3.\ 0{,}2^2 + 0{,}8 = 0{,}104$,

b) Con 15 dígitos se tiene la pérdida mínima de 19,24 ptas.

53. Fiabilidad Funcional.

Se llama "fiabilidad" de un sistema ***A*** (computadora electrónica, cohete, satélite artificial, etc.), a la probabilidad P(A) de que el sistema funcione con éxito durante un tiempo fijado.

Corrientemente un sistema está compuesto por varios subsisternas cuyo éxito o fallo afecta al éxito del sistema total.

Sea:

A: suceso "que el sistema total funcione con éxito"

A_i: suceso 'que el subsístema *i* funcione con éxito".

Sea P***(A)*** la fiabilidad del sistema total.

P ***(***A_i***)*** la fiabilidad del subsistema *i*.

Un *"sistema serial"* se caracteriza porque el sistema total opera con éxito, si y sólo si todos los subsistemas funcionan con éxito.

Un segundo tipo de acoplamiento de sistemas parciales es "en paralelo". Tal sistema se caracteriza porque funciona si al menos uno de los subsistemas funciona.

a) Sea A un sistema formado por 10 subsistemas acoplados en serie. Calcular su fiabilidad sabiendo que $P(A_i)=0{,}99$; $i=1, 2,\ldots, 10$.

b) Idem para dos subsistemas en paralelo y $P(A_i)=0{,}90$, $i=1{,}2$.

54. En el lejano reino de Falandia a los condenados a muerte se les concedía la gracia de que su vida dependiera de que sacasen una bola blanca en el siguiente sorteo: Se ponían 50 bolas blancas en una urna y 50 negras en la otra, vendando los ojos al condenado y eligiendo éste una urna y tomando una bola de ella.

Mas en cierta ocasión un reo pidió la gracia de que se le dejara distribuir las bolas de otro modo antes de hacer el sorteo. Tras alguna discusión de los expertos se le concedió la gracia y colocó una blanca en una urna y en la otra 49 blancas y 50 negras.

¿Cuál resulta de este modo la probabilidad de salvar la vida?

55. ¿Cómo jugar un juego equitativo con una moneda incorrecta?

56. A fin de aceptar o rechazar lotes de piezas se propone el siguiente *plan de inspección por muestreo:* Se supone que los lotes tienen 1.000 piezas y que se toman 100 al azar. Se aceptará el lote si la muestra da 1 o menos piezas defectuosas y se rechaza en caso contrario. Calcular la probabilidad P de aceptar el lote si es p la proporción de defectuosos en el lote. En particular, calcular P para $p=0{,}004$ y $p=0{,}0017$.

57. Un fabricante recibe productos secundarios para una cadena de montaje; estos productos llegan en lotes de 100 y son sometidos a una prueba de aceptación destructiva. La regla de decisión es la siguiente: Se selecciona un elemento al azar y se prueba; si es bueno se acepta el lote, si es malo se selecciona un segundo elemento y se prueba; si es bueno se acepta el lote, si es malo se rechaza. Si un lote sometido a inspección contiene 25 unidades defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de ser aceptado?