Menú principal

Problemas de cálculo de probabilidades.

---

1. Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0,08	0,21	0,1		0,23	0,04

a) Calcular el dato que falta de la función de probabilidad.

b) Hallar la función de distribución de dicha variable.

c) Hallar la media y la desviación típica.

d) Calcular p[X>1] y p[-1,5<X<2].

Solución

a) Para que la suma de las p_i sea 1 el valor que falta es 0,34.

b) La función de distribución es

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<-2 \\ 0{,}08 & si\ -2\le x<-1 \\ 0{,}29 & si\ -1\le x<0 \\ 0{,}39 & si\ 0\le x<1 \\ 0{,}73 & si\ 1\le x<2 \\ 0{,}96 & si\ 2\le x<3 \\ 1 & si\ x\ge 3 \end{cases}$$

c) Hallar la media y la desviación típica

X	-2	-1	0	1	2	3	Sumas
p	0,08	0,21	0,10	0,34	0,23	0,04	1
X_i*p_i	-0,16	-0,21	0	0,34	0,46	0,12	0,55

$X_i^2 * p_i$	0,32	0,21	0	0,34	0,92	0,36	2,15

La media es:

$$\sum_i x_i \cdot p_i = 0{,}55$$

y la varianza es:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_i X_i^2 . p_i - 0{,}55^2 = 2{,}15 - 0{,}3025 = 1{,}8475$$

e) Calcular p[X>1] y p[-1,5<X<2].

p[X>1]=1- p[X≤1]=1-F(1)=1-0,73=0,36.

p[-1,5<X<2]=0,73-0,08=0,65

2. En una determinada ciudad el 20% de los habitantes lee el periódico A y el 16% el B, los dos periódicos lo leen un 1%. Calcular la probabilidad de:

1. **Un individuo que lea el periódico A, lea también el B.**
2. **Un individuo que lea el periódico B, lea también el A.**
3. **Un individuo que no lea el periódico A, tampoco lo haga con el B.**
4. **Un individuo que no lea el periódico B, tampoco lo haga con el A.**

Solución

Los datos iniciales se pueden resumir en una tabla.

	Lee B	No lee B	
Lee A	0.01		0.20
No Lee A			
	0.16		

Completando los datos que faltan, se obtiene:

	Lee B	No lee B	
Lee A	0.01	0.19	0.20
No Lee A	0.15	0.65	0.80
	0.16	0.84	1

Luego:

a) $$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.01}{0.20}=0.05$$

b) $$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.01}{0.16}=0{,}0625$$

c) $$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{0.65}{0.80}=0{,}8125$$

d) $$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.65}{0.84}=0{,}7738$$

3. Una institución bancaria emplea un modelo informatizado de crédito para asignar puntos a todas las solicitudes de crédito. Esta puntuación se emplea como ayuda a la hora de facilitar el crédito. Todas las solicitudes valoradas favorablemente por el ordenador, se les concede el crédito. Supóngase que el 3% de todos los préstamos que se otorgan presentan problemas de cobro y que los modelos informatizados son eficaces en la predicción en el 99% de los casos. Si el 85% de los préstamos concedidos reciben puntuación favorable por los modelos computarizados, determinar:

1. **La probabilidad de que un préstamo que recibe una puntuación negativa no presente ningún problema de cobro.**
2. **Si una solicitud que recibió una puntuación negativa, ¿cuál es la probabilidad de que presente problemas de cobro?.**

Solución

Los datos iniciales se pueden resumir en una tabla. Téngase en cuenta que el 99% del 85% de los casos es igual a 84,15%

	Problemas Pago	Sin Problemas de Pago	
P. Favorable		0.8415	0.85
P. Negativa			
	0.03		

Completando los datos que faltan, se obtiene:

	Problemas Pago	Sin Problemas de Pago	
P. Favorable	0,0085	0.8415	0.85
P. Negativa	0,0215	0,1285	0.15
	0.03	0.97	1

a) $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0.1285}{0.15} = 0{,}8567$

b) $P(\overline{B}/\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0.0215}{0.15} = 0{,}1433$

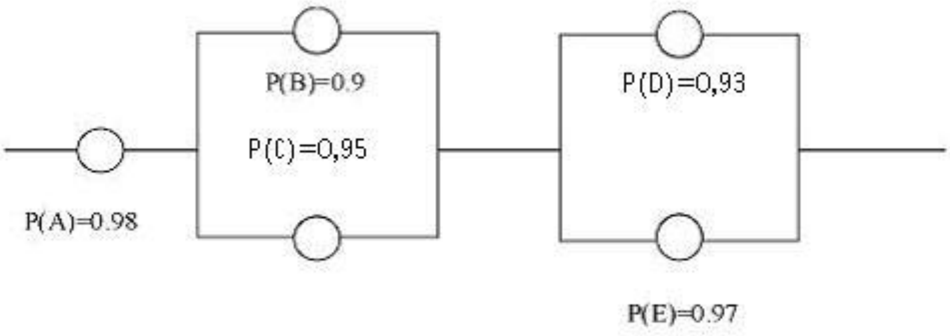
4. Una planta recibe reguladores de voltaje de dos diferentes proveedores, B_1, B_2; el 75% de los reguladores se compra a B_1 y el resto a B_2. El porcentaje de reguladores defectuosos que se reciben de B_1 es el 8% y el 10% de B_2. Determinar la probabilidad de que, elegido al azar un regulador de voltaje, funcione.

Sea A el suceso: elegir un regulador no defectuoso.

$P(A) = P(A\cap(B_1 \cup B_2)) = P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) = P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2)$

P(A)=0.92*0.75+0.90*0.25=0.915.

5. Un sistema contiene 5 componentes que se encuentran conectados entre sí como se muestra en la figura, donde las probabilidades indican la seguridad de que la componente funcione adecuadamente. Si se supone que el funcionamiento de una componente en particular es independiente de las demás, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?.



Sea F el suceso de que el sistema funcione.

$F = A\cap(B\cup C)\cap(D\cup E)$; $P(F) = P(A).P(B\cup C).P(D\cup E)$

Luego P(F)=0.98*0.995*0.9979=0.973

6. Supóngase que en un centro médico de todos los fumadores de los que se sospecha que tengan cáncer pulmonar, el 90% lo padecía mientras que únicamente el 5% de los no fumadores lo padecía. Si la proporción de fumadores es del 45%, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado al azar, sea fumador?

<u>Solución</u>

Resumamos los datos en una tabla

	Padece Cáncer	No padece Cáncer	
Fumador	0.405	0.045	0.45
No Fumador	0.0275	0.5225	0.55
	0.4325	0.5675	1

P(F/A)=P(A$\cap$F)/P(A)=0.405/0.4325=0,9364.

Otra forma importante de resolverlo es: utilizando el teorema de Bayes.

Sea B_1 el suceso "el pacientes es fumador"

B_2 el suceso "el paciente no es fumador".

Sea A el suceso "el paciente tiene cáncer pulmonar"

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(B_1).P(A/B_1)+P(B_2).P(A/B_2)}=\frac{0.45*0.9}{0.45*0.9+0.55*0.05}=0.9364$$

7. Una compañía estudia la comercialización de un nuevo producto. El presidente de la compañía desea que el producto sea superior al de su más cercano competidor. Con base en una evaluación preliminar que realizó el personal clave, se decide asignar una probabilidad del 50% de que el producto sea superior al ofrecido por el competidor, el 30% de que tenga la misma calidad y el 20% de que sea inferior. Un estudio de mercado sobre el producto concluye que éste es superior al de su competidor. Con base en la experiencia sobre el resultado de las encuestas, se determina que si el producto es realmente superior, la probabilidad de que la encuesta alcance la misma conclusión es del 0.7. Si el producto tiene la misma calidad que el del competidor, la probabilidad es 0.4. Si el producto es inferior, la probabilidad de que la encuesta indique un producto superior es de 0.2. Dado el resultado de la encuesta, ¿cuál es la probabilidad , corregida, de obtener un producto superior?

Este es un ejemplo de retroalimentación. La información empírica obtenida como resultado de una encuesta nos sirve para corregir la probabilidad "a priori" inicial.

Resumamos los datos en una tabla

	S´	**M´$\cup$I**	
S	0.35	0.15	0.5
M	0.12	0.18	0.3
I	0.04	0.16	0.2
	0.51	0.49	1

P(S/S´)=P(S$\cap$ S´)/P(S´)=0.35/0.51=0,6863.

8. Los empleados de la compañía Nuevos Horizontes se encuentran separados en tres divisiones: administración, operación de planta y ventas. La siguiente tabla indica el número de empleados en cada división clasificados por sexo:

	Mujer (M)	*Hombre (H)*	*Totales*
Administración (A)	**20**	**30**	**50**
Operación de planta (O)	**60**	**140**	**200**
Ventas (V)	**100**	**50**	**150**
Totales	**180**	**220**	**400**

a) Usar un diagrama de Venn para ilustrar los eventos O y M para todos los empleados de la compañía. ¿Son mutuamente excluyentes?

b) Se elige aleatoriamente un empleado:

1. **¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?**
2. **¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas?**
3. **¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje en la división de administración?**
4. **¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en la división de operación de planta, si es mujer?**
5. **¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer si trabaja en la división de operación de planta?**

c) ¿Son los eventos V y H estadísticamente independientes?

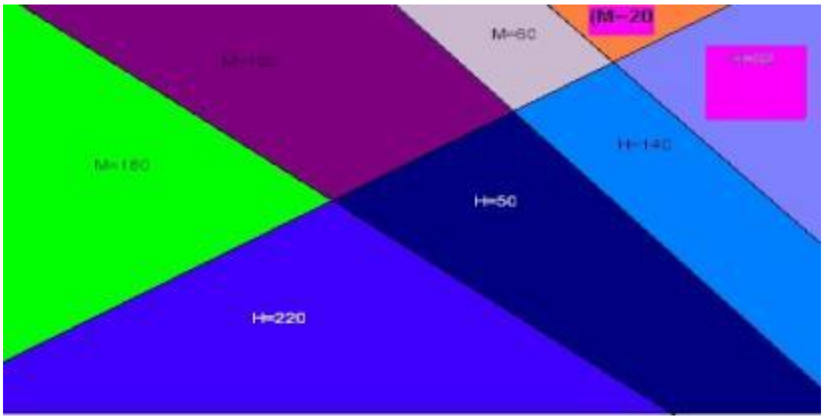
d) ¿Son los eventos A y M estadísticamente independientes?

e) Determinar las siguientes probabilidades:

1. P(A∪M)	**3. P(O∩F)**
2. P(A∪M*)	**4. P(M/A)**

Solución

a)Los eventos O y M no son mutuamente excluyentes puesto que tienen 60 elementos comunes, su intersección es no vacía.



b)

1. La probabilidad de que sea mujer es : P(M)=180/400

2. Trabaje en ventas: P(V)=150/400
3. P(H $\cap$ A)=30/400.
4. P(O/M)=60/180
5. P(M/O)=60/200

c) Son V y H independientes: P(V$\cap$H)=50/400; P(V)=150/400, P(H)=220/400. Luego, no son independientes puesto que P(V$\cap$H) $\neq$ P(V).P(H).

d) Son A y M independientes: P(A $\cap$M)=20/400; P(A)=50/400, P(M)=180/400. Luego,

P(A $\cap$M) $\neq$ P(A).P(M) y por tanto A y M no son independientes.

e) P(A $\cup$M) P(O $\cap$M)

P(A $\cup$M*) P(M/A)

P(A $\cup$M)=P(A) + P(M) –P(AM)=50/400+180/400-20/400

P(A $\cup$M*)=P(A) + P(M*) - P(AM*)=50/400 + 220/400-30/400

P(O $\cap$M)=60/400

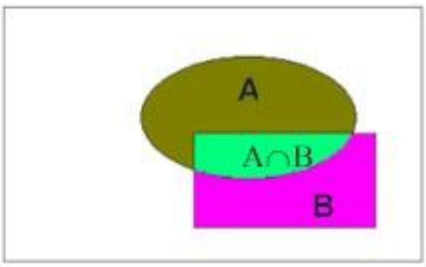
P(M/A)=20/50

9. La probabilidad de que cierto componente eléctrico funcione es de 0.9. Un aparato contiene dos de éstos componentes. El aparato funcionará mientras lo haga, por lo menos, uno de los componentes.

a) Sin importar cuál de los dos componentes funcione o no, ¿cuáles son los posibles resultados y sus respectivas probabilidades? (Puede suponerse independencia en la operaci6n entre los componentes.)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el aparato funcione?

<u>Solución</u>



a) Los posibles resultados son: A $\cap$ B, A $\cap$ B*, A* $\cap$ B, A* $\cap$ B*. Estos sucesos son todos incompatibles, no tienen elementos comunes.

P(A $\cap$ B)=P(A).P(B)=0.9*0.9=0.81

P(A $\cap$ B*)=P(A).P(B*)=0.9*0.1=0.09

P(A* ∩ B)=P(A*).P(B)=0.1*0.9=0.09

P(A* ∩ B*)=P(A*).P(B*)=0.1*0.1=0.01

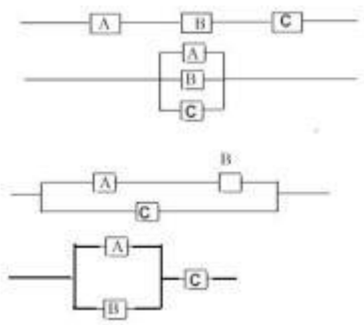
Para que el sistema funcione tiene que presentarse uno cualquiera de los tres primeros casos. Por tanto la probabilidad, al ser incompatibles, es igual a la suma de las probabilidades:

P((A ∩ B) ∪(A ∩B*) ∪(A*∩ B))=P(A ∩ B)+P(A ∩B*)+P(A*∩ B)=0.81+0.09+0.09 =0.99

b) Otra forma de resolverlo. Sea A el primer componente y B el segundo. Se tiene que P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B); luego, P(A∪B)=0,9+0,9-0,9*0,9=1,8-0,81=0,99

10. Un sistema contiene tres componentes A, B y C. Éstos pueden conectarse en una, cualquiera, de las cuatro configuraciones mostradas en la figura 2.3. Si los tres componentes operan de manera independiente y si la probabilidad de que uno, cualquiera de ellos, esté funcionando es de 0.95, determinar la probabilidad de que el sistema funcione para cada una de las cuatro configuraciones.

Solución



a) P(A∩B∩C)=P(A)P(B)P(C)=0.95*0.95*0.95=0,8574

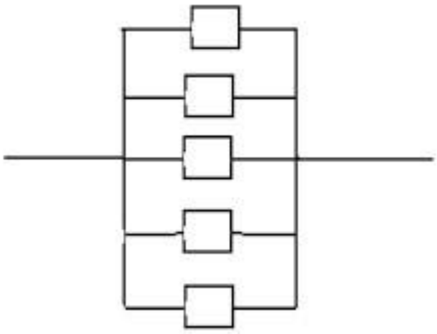
b) P(A∪B∪C)=P(A∪(B∪C))=P(A)+P(B∪C)-P(A ∩ (B∪C))=P(A)+P(B)+P(C)-P(B ∩C)-P((A ∩ B) ∪ (A ∩ C))= P(A)+P(B)+P(C)-P(B ∩C)- P(A ∩ B) –P(A ∩ C)+P(A∩B∩C)=0,95 + 0,95 + 0,95 –0.95*0,95-0,95*0,95-0,95*0,95+0,95*0,95*0,95=2,85-2,7075+0,857375=0,999875

c) P((A∩B)∪C)=P(A∩B) +P(C) - P(A∩B∩C)=P(A).P(B)+P(C)- P(A∩B∩C) =0,95*0,95+0,95-0,95*0,95*0,95=0,9951

d) P((A∪B) ∩C)= P(A∪B) .P(C)=(P(A)+P(B)-P(A∩B)).P(C)=(0,95+0,95-0,95*0,95).0,95=0,9476.

11. Una forma de incrementar la probabilidad de operación de un sistema (conocida como la confiabilidad del sistema), es mediante la introducción de una copia de los componentes en una configuración paralela, como se ilustra en la segunda parte de la figura anterior. Supóngase que la Nasa desea una probabilidad no menor de 0.999 99, de que el trasbordador espacial entre en órbita alrededor de la tierra, con éxito. ¿Cuántos motores cohete deben configurarse en paralelo para alcanzar esta confiabilidad de operaci6n si se sabe que la probabilidad de que uno, cualquiera, de los motores funcione adecuadamente es de 0.95? Supóngase que los motores funcionan de manera independiente entre sí.

Solución



Empleando las leyes de Morgan:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y extendiendo el resultado a un número finito de conjuntos, se tiene:

$$P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)$$

, luego:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_i P(\overline{A_i})$$

Por tanto:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_i P(\overline{A_i}) = 1 - 0.05^n = 0.99999$$

Despejando $1-0,99999=0,05^n$; $0,00001=0,05^n$; $\log(0,00001)=n\log(0,05)$; $n=\log(0,00001)/\log(0,05)=3,84$… Por tanto, a partir del 4º.

12. El 5% de las unidades producidas en una fábrica se encuentran defectuosas cuando el proceso de fabricación se encuentra bajo control. Si el proceso se encuentra fuera de control, se produce un 30% de unidades defectuosas. La probabilidad marginal de que el proceso se encuentre bajo control es de 0.92. Si se escoge aleatoriamente una unidad y se encuentra que es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que el proceso se encuentre bajo control?

Solución.

Resumamos la información en una tabla.

$P(D/C)=0.05$; $P(D/NC)=0.30$. Luego $P(D\cap C)=P(C).P(D/C)==0.92*0.05=0.046$

$P(D\cap NC)=P(NC).P(D/NC)=0.08*0.30=0.024$

	Defectuosa	Buena	
Control	0.046	0.874	0.92
No Control	0.024	0.056	0.08
	0.07	0.93	

P(C/D)=P(C$\cap$D)/P(D)=0.046/0.07=0.657

Se puede emplear directamente el teorema de Bayes.

$$P(C/D)=\frac{P(D/C).P(C)}{P(D/C).P(C)+P(D/NC).P(NC)}=\frac{0.05*0.92}{0.05*0.92+0.30*0.08}=\frac{0.046}{0.07}=0.6571$$

13. Una planta armadora recibe microcircuitos provenientes de tres distintos fabricantes B_1, B_2 y B_3. El 50% del total se compra a B_1, mientras que a B_2 y B_3 se les compra un 25% a cada uno. El porcentaje de circuitos defectuosos para B_1,, B_2 y B_3 es 5, 10 y 12% respectivamente. Si los circuitos se almacenan en la planta sin importar quién fue el proveedor:

a) Determinar la probabilidad de que una unidad armada en la planta contenga un circuito defectuoso.

b) Si un circuito no está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vendido por el proveedor B_1.?

Solución.

	Defectuoso	No defectuoso	
B_1	0,025	0,475	0.50
B_2	0,025	0,225	0.25
B_3	0,03	0,22	0.25
	0,08	0,92	

P(D/B1)=0.05; P(D/B2)=0.1; P(D/B3)=0.12

Por tanto: P(D$\cap$B1)=P(D/B1).P(B1)= 0.05*0.50;
P(D$\cap$B2)=P(D/B2).P(B2)=0.1*0.25; P(D$\cap$B3)=P(B3)P(D/B3)=0.25*0.12

a) P(D)=P(D/B1)P(B1)+P(D/B2)P(B2)+P(D/B3)P(B3)=0.08

b) P(B1/ND)=P(B1$\cap$ND)/P(ND)=0,475/0,92=0,5163. También se puede aplicar directamente el teorema de Bayes.

14. Un inversionista está pensando en comprar un número muy grande de acciones de una compañía. La cotización de las acciones en la bolsa, durante los seis meses anteriores, es de gran interés para el inversionista. Con base en esta información, se observa que la cotización se relaciona con el producto nacional bruto. Si el PNB aumenta, la probabilidad de que el valor de las acciones aumente es de 0.8. Si el PNB es el mismo, la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de 0.2. Si el PNB disminuye, la probabilidad es de sólo 0. 1. Si

para los siguientes seis meses se asignan las probabilidades 0.4, 0.3 y 0.3 a los eventos, el PNB aumenta, es el mismo y disminuye, respectivamente, determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses.

Solución

	A. Aumenta	A. No Aumenta	
PNB A	0.32	0.08	0.4
PNB I	0.06	0.24	0.3
PNB D	0.03	0.27	0.3
	0.41	0.59	

P(A. Aumenten)=0.41

15. Con base en varios estudios una compañía ha clasificado, de acuerdo con la posibilidad de descubrir petróleo, las formaciones geológicas en tres tipos. La compañía pretende perforar un pozo en un determinado sitio, al que se le asignan las probabilidades de 0.35, 0.40 y 0.25 para los tres tipos de formaciones respectivamente. De acuerdo con la experiencia, se sabe que el petróleo se encuentra en un 40% de formaciones del Tipo I, en un 20% de formaciones del tipo II y en un 30% de formaciones del tipo III. Si la compañía no descubre petróleo en ese lugar, determínese la probabilidad de que exista una formación del tipo II.

Solución

	Petroleo	No Petroleo	
Tipo I	0,14	0,21	0.35
Tipo II	0,08	0,32	0.40
Tipo III	0,075	0175	0.25
	0,295	0,705	1

P(Tipo II/ No P)=0,32/0,705=0,4539.