Menú principal

Variable aleatoria.

Dado un espacio probabilístico (E, A, p) se llama variable aleatoria X(a) a una función que toma valores reales y está definida para los sucesos elementales *a* del espacio probabilístico. Además se supone para cada número real x el conjunto {*a* / X(*a*) ≤ x }de sucesos elementales *a* en que X toma valores menores o iguales que x es un suceso de la familia A. El caso de variable aleatoria discreta supone además que hay un numero finito o numerable de valores x_i tales que $P[X=x_i] = p_i \geq 0$,

$$\sum_i p_i = 1$$

Una variable aleatoria puede ser discreta o continua según sea el rango de esta función.

Este conjunto de valores $P[X=x_i]=p_i$ es lo que se llama la **ley o distribución de la probabilidad** de la variable X. En otras palabras se llama función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X a la aplicación que asocia a cada valor x_i de la variable aleatoria su probabilidad p_i.

Dada una variable aleatoria discreta X, a la función acumulativa:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

se le llama **función de distribución de X.**

En general una distribución acumulativa F(x) de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de X, de tal manera que

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ para cualquier x.
2. $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$
3. $P(X > x) = 1 - F(x)$

Además, puede establecerse que para variables aleatorias de valor entero se tiene que:

4. $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$
5. $P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

Ejemplo. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar dos monedas y anotar sus resultados. El espacio muestral estaría formado por E={(C,C) (C,X) (X,C) (X,X)}.

Sea X la v.a. que nos da el número de caras obtenido. Los valores que puede tomar X son 0, 1,2 y la función de distribución de probabilidad viene dada por :

X	p_i=P[X=x_i]
0	¼=0,25
1	½=0,5
2	¼=0,25

Media y varianza de una distribución de probabilidad.

Si una variable aleatoria discreta X toma los valores x_i con probabilidad p_i, su media, también llamada esperanza matemática, es:

$$E(x) = \alpha_1 = \mu = \sum_i x_i p_i$$

Su varianza es:

$$Var(X) = \mu_2 = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \alpha_1)^2 p_i$$

y la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \alpha_1)^2 p_i}$$

Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas.

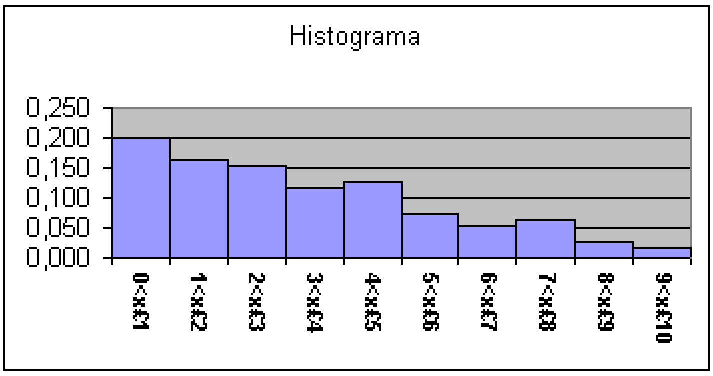
Se dice que una variable aleatoria es continua cuando toma valores en cualquier punto de un intervalo *(a, b)* de la recta real. En este caso no tiene sentido preguntarse por la probabilidad de que la variable tome un valor determinado (en teoría puede toma r un conjunto infinito de valores). Cuando trabajamos con variables continuas, siempre preguntaremos por la probabilidad de que los valores de la variable se encuentren dentro de un determinado intervalo.

Una v.a continua está caracterizada por una función f(x) que recibe el nombre de función de densidad. Como la probabilidad de que P(X=x) =0, la función f(x) no representa la probabilidad de que X = x. Más bien proporciona un medio para calcular la probabilidad de un intervalo. P (a $\leq$ X$\leq$ b).

Veamos un ejemplo.

Supóngase que se miden los tiempos, entre dos llegadas consecutivas, de 110 clientes a una tienda y se agrupan en 10 intervalos de un minuto cada uno

$0<x\leq 1$	22	0,200
$1<x\leq 2$	18	0,164
$2<x\leq 3$	17	0,155
$3<x\leq 4$	13	0,118
$4<x\leq 5$	14	0,127
$5<x\leq 6$	8	0,073
$6<x\leq 7$	6	0,055
$7<x\leq 8$	7	0,064
$8<x\leq 9$	3	0,027
$9<x\leq 10$	2	0,018



Puesto que cada rectángulo tiene una base 1, las áreas de cada uno de ellos coincide con la frecuencia relativa y la suma de todas es, por tanto, igual a la unidad.

Si en lugar de establecer 10 intervalos, establecemos 20 intervalos de amplitud medio minuto; y, en lugar de 110 clientes, observamos 1000 clientes, el histograma que se obtiene es menos irregular. Si continuamos aumentado el número de observaciones y disminuyendo la amplitud de los intervalos, llegaremos a una curva límite que define la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria.

Formalmente la definición es la siguiente:

La función de densidad de una variable aleatoria X se define como y=f(x) que verifica:

1. f(x) ≥ 0.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Al igual que en el caso de variable aleatoria discreta, la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua X es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Media y varianza de una distribución continua.

Se define la media de una distribución de probabilidad de la variable aleatoria continua X como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

La varianza de X se define como:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 F(x) dx = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Propiedades de la esperanza de una variable aleatoria.

1. E (c)=c. C=cte
2. E[aX+b]=a E[X] +b
3. E[g(X) + h(X)]=E[g(X)] + E [h(X)]

Momentos de una variable

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x x^r p(x); \quad \mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

Para los momentos centrales alrededor de la media

$$\mu_r = E((X-\mu)^r) = \sum_x (x-\mu)^r p(x) \quad \mu_r = E((X-\mu)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x) dx$$

Algunas propiedades son:

1. $\mu_0=E[(X-\mu)^0]=E[1]=1$
2. $\mu_1=E[(X-\mu)^1]=E[X]-\mu=0$
3. $\mu_2=E[(X-\mu)^2]=E[X^2]-2\mu E[X]+\mu^2=\mu'_2-\mu^2$. Este momento se llama varianza.

Una propiedad importante para la varianza es:

Var(aX+b)$=E[(aX+b)^2]-E^2[(aX+b)]=E[(a^2X^2+2abX+b^2)] - a^2E^2[X]-2abE[X]-b^2=$

$a^2E(X^2)+2abE[X]+b^2- a^2E^2[X]-2abE[X]-b^2=a^2E^2[X^2]-a^2E^2[X]=a^2(E^2[X^2]-E^2[X])$

$=a^2Var(X)$

Cualquier momento central puede expresarse a través de los momentos alrededor de cero.

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right]$$

desarrollando

$$(X-\mu)^r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{r!}{i!(r-i)!} X^{r-i}\mu^i$$

Llevando la expresión

$$\mu_r = E[\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{r!}{i!(r-i)!} X^{r-i}\mu^i = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{r!}{i!(r-i)!}\mu^i \mu'_{r-i}]$$

Algunos Ejemplos

19. Sea el experimento que consiste en el lanzamiento de tres monedas y anotar el número de caras obtenidas. Se pide:

a) La función de probabilidad y su representación.

b) La función de distribución y su representación.

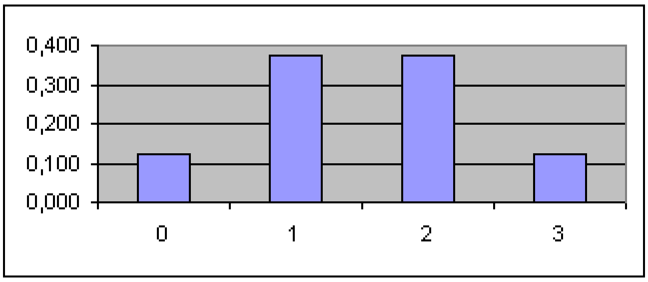
c) La media y la desviación típica.

d) Si X es la variable aleatoria que expresa el número de caras, hallar p [$1 \leq x < 3$].

Solución

La variable aleatoria X puede tomar los valore 0, 1, 2, 3. La probabilidad con que toma estos valores es la función de probabilidad de X a)

X	p(X)
0	0,125
1	0,375
2	0,375
3	0,125

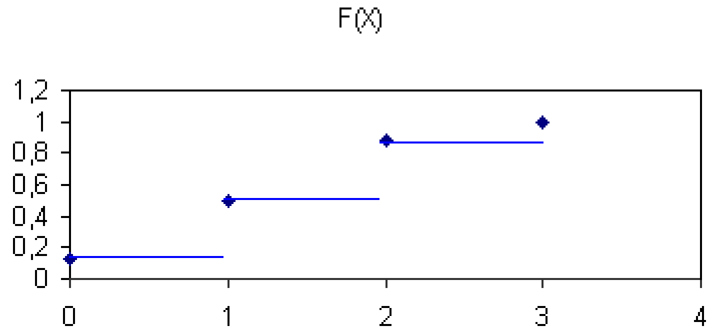


b) La función de distribución de la variable aleatoria discreta X se define como:

$$F(x_i) = p[X \le x_i] = \sum_{j=1}^{i} p[X = x_j]$$

por tanto

X	F(X)
0	0,125
1	0,5
2	0,875
3	1



c) Media y desviación típica.

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i . p[X = x_i]$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

X	p(X)	$x_i * p_i$	$x^2_i * p_i$
0	0,125	0	0
1	0,375	0,375	0,375
2	0,375	0,75	1,5
3	0,125	0,375	1,125
	Suma	1,5	3

Varianza = 3 - $1,5^2$ = 0,75 y **Desviación típica** = 0,8660

d) p [1 ≤ x < 3]=p[X=1] + p[X=2]=0,375+0,375=0,75

21. Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:

X	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
p	**0,08**	**0,21**	**0,1**		**0,23**	**0,04**

a) Calcular el dato que falta de la función de probabilidad.

b) Hallar la función de distribución de dicha variable.

c) Hallar la media y la desviación típica.

d) Calcular p[X>1] y p[-1,5<X<2].

Solución

a) Si p es una función de probabilidad la suma de todas ha de ser 1. Por tanto, el dato que falta es 1-0,66=0,34.

b) La función de distribución de la variable aleatoria discreta X se define como:

$$F(x_i) = p[X \leq x_i] = \sum_{j=1}^{i} p[X = x_j]$$

por tanto

X	F(x)
-2	0,08
-1	0,29
0	0,39
1	0,73
2	0,96
3	1

c) La Media y la varianza son:

X	p	xi*pi	$x^2_i * p_i$
-2	0,08	-0,16	0,32
-1	0,21	-0,21	0,21
0	0,1	0	0
1	0,34	0,34	0,34
2	0,23	0,46	0,92
3	0,04	0,12	0,36
Sumas	**1**	**0,55**	**2,15**

Esperanza de X = 0,55

Varianza de X = 1,8475

La desviación típica es 1,36.

d) p[X>1] y p[-1,5<X<2] . P[X>1]=p[X = 2] + p[X = 3]=0,23+0,04=0,27. y p[-1,5<X<2]=p[X<2]-p[X<-1,5]=0,73-0,08 =0,65

22. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad:

$$f(x) = \begin{cases} cx & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Calcular el valor de c.

Calcular p[1/2 < X < 3/2] y p[X > l].

Calcular la función de distribución.

Solución

a) Si f(x) es una función de densidad se verifica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;\ \int_0^2 cxdx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = c[2-0] = 1;\ luego c = 1/2$$

.

b) p[1/2 < X < 3/2]=F(3/2)-F(1/2)=1/2; p[X > l]=1-p[X<=1]=1-F(1)=3/4.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

23. Sea f(x) la función densidad de una cierta variable aleatoria X, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - \dfrac{x}{2} & 0 < x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Halla la función de distribución de X.

Calcula la media de la distribución.

Solución

a) La función de distribución F(x) es igual a:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ x - \dfrac{x^2}{4} & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

b) Calcula la media de la distribución

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 (x - \frac{x^2}{2})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = (\frac{4}{2} - \frac{8}{6}) - 0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

24. La distribución de los ingresos de las familias de cierta población, en millones de pesetas, es una variable aleatoria continua X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{8.000}(20x - x^2) & 0 \le x \le 20 \\ 0 & en\,el\ resto \end{cases}$$

Si sólo realizan la declaración de la renta las familias con ingresos superiores a tres millones de pesetas, ¿qué porcentaje de familias quedarán exentas de realizar la declaración?

Solución

Nos piden que calculemos en % la probabilidad p[X<=3]. Esta probabilidad es igual:

$$p[X \le 3] = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \frac{6}{8000}\int_0^3 (20x - x^2)dx = \frac{6}{8000}\left[10x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{6}{8000}\left[810 - \frac{27}{3}\right] = 0{,}06075$$

Es decir, un 6,075% de las familias quedarán exentas de hacer la declaración de la renta.

25. La ley de probabilidad de una variable aleatoria discreta es:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	a	b	c	0,2

Sabiendo que p[X ≤ 2] = 0,7 y que p[X ≥ 2]= 0,75, hallar la esperanza matemática y su desviación típica.

Solución

De p[X ≤ 2] = 0,7; se deduce que a+b=0,6; de p[X ≥ 2]= 0,75; se obtiene que b+c=0,55. Por otro lado, la suma de todos vale 1, luego a+b+c=0,7; se obtiene que c=0,1; b=0,45; a=0,15.

X	p(x)	x_i*p_i	x_i^2*p_i
0	0,1	0	0
1	0,15	0,15	0,15
2	0,45	0,9	1,8
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
Suma	1	2,15	6,05

Media =	**2,15**
Varianza =	**1,4275**
Desv. Tip. =	**1,1948**

26. La demanda diaria de azúcares es una variable continua con función densidad:

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & 2 < x \le 3 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Comprobar que a = 1/2.

b) Porcentaje de días en los que la demanda supera las dos toneladas.

Solución

a) Puesto que se trata de una función de densidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

por tanto:

$$\int_0^1 axdx + \int_1^2 \frac{1}{2}dx + \int_2^3 (-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2})dx = 1; luego \left[\frac{ax^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{-x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_2^3 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1; a = 1/2.$$

b) $$P(X > 2) = \int_2^3 (-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2})dx = \left[\frac{-x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_2^3 = 1/4 = 0{,}25$$

Un 25% de los días.

27. En una rifa hay 100 números y hemos comprado 2. Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si en la rifa hay un solo premio, ¿qué probabilidad tenemos de conseguirlo?

b) Si en la rifa hay dos premios:

- **¿Qué probabilidad tenemos de conseguir los dos premios**
- **¿Qué probabilidad tenemos de conseguir al menos un premio?**

Solución

a) p=2/100=0,02.

b) La primera parte equivale a elegir dos números de entre dos para los casos favorables y de entre 100 para los casos posibles. Luego:

$$p = \binom{2}{2} \Big/ \binom{100}{2} = \frac{2}{100 . 99} = \frac{1}{4950} = 0{,}0002$$

c) Al menos uno es el contrario a no conseguir ninguno. Por tanto, la probabilidad es igual a:

$$1 - \binom{98}{2} \Big/ \binom{100}{2} = 1 - \frac{98 . 97}{100 . 99} 1 - 0{,}96 = 0{,}04$$

28. En una urna hay 8 bolas negras y 5 bolas blancas. Calcular:

a) La probabilidad de que al extraer dos bolas, con reemplazamiento, la primera sea negra y la segunda sea blanca.

b) La probabilidad de que al extraer dos bolas, sin reemplazamiento, la primera sea negra y la segunda sea blanca.

Solución

Sea N_1 el suceso "sacar bola negra en la 1ª extracción" y B_1 "sacar bola blanca en la 1ª extracción". Sea N_2 el suceso "sacar bola negra en la 2ª extracción" y B_2 "sacar bola blanca en la 2ª extracción".

a) Con reemplazamiento. En este caso los sucesos N_1 y B_2 son independientes y por tanto $p(N_1 \cap B_2)=p(N_1).p(B_2)=8/13.5/13=40/169=0{,}2367$.

b) Sin reemplazamiento. $p(N_1 \cap B_2)=p(B_2/N_1).p(N_1)=5/12.8/13=40/156=0{,}2564$.

29. Se sabe que para un alumno cualquiera de un Instituto la probabilidad de que éste practique algún deporte es 0,5 acuda al cine con asiduidad con una probabilidad 0,6 y practique deporte o vaya al cine con una probabilidad 0,9. Elegido al azar un alumno de este Instituto, calcular

a) La probabilidad de que vaya al cine y practique algún deporte.

b) La probabilidad de que no practique deporte ni vaya al cine.

Solución

Sea A el suceso de que un alumno del instituto practique un deporte y B de que acuda con asiduidad al cine. $P(A)=0{,}5$; $p(B)=0{,}6$; $p(A \cup B)=0{,}9$; de donde

a) $p(A \cap B)=0,5 + 0,6 - 0,9=0,2$.

b) $P(A^* \cap B^*)=1- p(A \cup B)=1-0,9=0,1$.

30. Tenemos dos urnas como sigue:

A: 4 bolas rojas y 6 blancas.

B: 7 bolas rojas y 3 blancas.

Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de la segunda urna. Calcular la probabilidad de que bolas sean del mismo color.

Solución

Sean U_1 y U_2 los sucesos elegir la 1ª ó 2ª urna, respectivamente; y sean R_1 y B_1 los sucesos sacar bola roja ó bola blanca en la 1ª extracción. Por último, sean R_2 y B_2 los sucesos sacar bola roja ó blanca en la 2ª extracción. La probabilidad que nos piden es $p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap B_2) =$ $[p(R_1 \cap R_2/U_1) .p(U_1) + p(R_1 \cap R_2/U_2) .p(U_2)] + [p(B_1 \cap B_2/U_1) .p(U_1) + p(B_1 \cap B_2/U_2) .p(U_2)]$=[4/10.8/11.1/2+7/10.5/11.1/2] + [6/10.4/11.1/2 + 3/10.7/11.1/2]= 32/220 + 35/220 + 24/220 + 21/220 = 112/220=0,5090.

Se puede hacer también a través del diagrama de árbol.

Ejercicios de Ampliación

1. La variable aleatoria X representa el tiempo entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \exp(-x/2) & x > 0 \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

para una constante k apropiada.

Calcular:

1. **El valor de k**
2. **La función de distribución acumulativa.**
3. **La probabilidad de que 2<X<6**
4. **La probabilidad de que X ≥ 8.**

Solución

$$\int_0^\infty k \exp(-x/2)dx = 1; \qquad k\int_0^\infty \exp(-x/2)dx = k\left[-2\exp(-x/2)\right]_0^\infty = k2 = 1; \; k = 1/2$$

$$F(x)=\int_0^x 1/2\exp(-x/2)dx = 1/2\left[-2\exp(-x/2)\right]_0^x = -\exp(-x/2)+1$$

P(2<X<6)=F(6) – F(2)=0.3181

P(X ≥ 8)=1 – P (X<8) = 1 – F(8)=0.0183

2. Dos vendedores de seguros de vida, A y B, visitan de 8 a 12 clientes potenciales por semana, respectivamente. Sean X e Y sendas v.a que representan el número de seguros vendidos por A y B como resultado de sus visitas. Con base en una gran cantidad de información pasada, las probabilidades de los valores X e Y son las siguientes:

0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p(x)	0,02	0,09	0,21	0,28	0,23	0,12	0,04	0,01	0

Comparar y contrastar las distribuciones de probabilidad de X e Y empleando sus medias varianzas y factores de forma.

Solución

x	p(x)	$x_i p(x_i)$	$x_i^2 p_i$	$x_i^3 p_i$	$x_i^4 p_i$
0	0,02	0,00	0,00	0,00	0
1	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
2	0,21	0,42	0,84	1,68	3,36
3	0,28	0,84	2,52	7,56	22,68
4	0,23	0,92	3,68	14,72	58,88
5	0,12	0,60	3,00	15,00	75
6	0,04	0,24	1,44	8,64	51,84
7	0,01	0,07	0,49	3,43	24,01
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0
Sumas	1,00	3,18	12,06	51,12	235,86

Media	3,1800	$\mu'_2=$	12,06	$\mu_2=$	1,9476
Varianza	1,9476	$\mu'_3=$	51,12	$\mu_3=$	0,3825
D.e	1,39556	$\mu'_4=$	235,86	$\mu_4=$	10,5650
Coef. Asim	0,1407	Coef. Aplast	=2,7853		

y_i	$P(y_i)$	$y_i p_i$	$y^2 p_i$	$y^3 p_i$	$y^4 p_i$

0	0,06	0	0	0	0
1	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21
2	0,28	0,56	1,12	2,24	4,48
3	0,24	0,72	2,16	6,48	19,44
4	0,13	0,52	2,08	8,32	33,28
5	0,05	0,25	1,25	6,25	31,25
6	0,02	0,12	0,72	4,32	25,92
7	0,01	0,07	0,49	3,43	24,01
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0
	1	2,45	8,03	31,25	138,59

Media	2,4500	μ'_2=	8,03	μ_2=	2,0275
Varianza	2,0275	$\mu'3$	31,25	$\mu 3$	1,6418
D.e	1,4239	$\mu'4$=	138,59	$\mu 4$=	13,4504
Coef. Asim	0,5687	Coef.Aplas=	3,272		

A primera vista parece existir poca diferencia entre las distribuciones de X e Y con respecto a la media y a la varianza, pero la distribución de Y tiene un sesgo positivo más grande que la de X. Además, la distribución de X es Platicúrtica ($\alpha 4<3$) mientras que la de Y es leptocúrtica ($\alpha_4>3$).

3. Considérese las variables aleatorias X e Y, cuyas funciones de densidad de probabilidad son

$$f(x) = \begin{cases} 1/30 & 80 \le x \le 110 \\ 0 & otro\ valor \end{cases} \qquad \mathbf{y} \qquad f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{10000}\exp(-y/10000) & y > 0 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$$

Determinar la media, la varianza y los momentos estandarizados tercero y cuarto.

Solución

$$E(X) = \int_{80}^{110} 1/30\, x\,dx = 1/30\left[\frac{x^2}{2}\right]_{80}^{110} = 95$$

$$E\left[(X-95)^2\right] = 1/30\int_{80}^{110}(x-95)^2 dx = 75$$

$$E\left[(X-95)^3\right] = 1/30\int_{80}^{110}(x-95)^3 dx = 0$$

$$E\left[(X-95)^4\right] = 1/30\int_{80}^{110}(x-95)^4 dx = 10125$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y\,\frac{1}{10000}\exp(-y/10000)\,dy = 10000\int_0^{\infty} u\exp(-u)\,du =$$

$$10000\,.\Gamma(2) = 10000$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2\,\frac{1}{10000}\exp(-y/10000)\,dy = 10000^2\,\Gamma(3) = 2.10$$

$$E(Y^3) = \int_0^{\infty} y^3\,\frac{1}{10000}\exp(-y/10000)\,dy = 10^{12}\Gamma(4) = 6.10^{12}$$

$$E(Y^4) = \int_0^{\infty} y^4\,\frac{1}{10000}\exp(-y/10000)\,dy = 10^{16}\Gamma(5) = 24.10^{16}$$

$\alpha_3(X)=\mu_3/d.e^3(X)=0$

$\alpha_4(X)=\mu_4/Var^2(X)=10125/75^2=10125/5625=1,8$

$Var(Y)=2.10^8-10000^2=10^8; \mu_3=2.10^{12}; \mu_4=9.10^{16}$

$\alpha_3(Y)=\mu_3/d.e^3(Y)=2.10^{12}/10^{12}=2$

$\alpha_4(Y)=\mu_4/Var^2(Y)=9.10^{16}/10^{16}=9$

Con estos datos se deduce que la distribución de X es simétrica respecto a la media, tiene de media 95 y varianza 75 y tiende a ser plana en su parte superior.

La distribución de Y está sesgada positivamente, tiene de media 10000 y desviación estándar 10000 y tiene un pico muy alto en su parte superior.

Otras Medidas de tendencia central y de dispersión

Para cualquier variable aleatoria X, se define a la mediana $x_{0,5}$ de X, como:

$$P(X < x_{0,5}) \leq 1/2 \quad y \quad P(X \leq x_{0,5}) \geq 1/2 \qquad si \quad X \quad es \quad discreta$$
$$P(X \leq x_{0,5}) = 1/2 \quad si\ X\ es\ continua$$

En general para cualquier variable aleatoria X, el valor cuantil x_q de orden q, 0<q<1, es el valor de X tal que:

$$P(X < x_q) \leq q \quad y \quad P(X \leq x_q) \geq q \quad si \quad X \quad es \quad discreta$$
$$P(X \leq x_q) = q \quad si\ X\ es\ continua$$

4. Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo de duración, en horas, de un cierto componente eléctrico. Si la función de densidad de probabilidad de X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1000}\exp(-x/1000) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

determinar y comparar la media y la mediana.

Solución

$$E(X) = \int_{x>0} x \frac{1}{1000}\exp(-x/1000)\,dx = \int_0^{\infty} u\exp(-u)1000\,du = 1000\,\Gamma(2) = 1000$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1000}\exp(-t/1000)\,dt = \frac{1}{1000}\left[-1000\ \exp(-t/1000)\right]_0^x = -\exp(-x/1000)+1$$

$$Luego: \quad F(x_{0,5}) = 1/2 = 1-\exp(-x/1000) \Rightarrow \exp(-x/1000) = 1/2; -x/1000 = \ln(1/2); x = -1000\ \ln(1/2) = 693{,}147$$

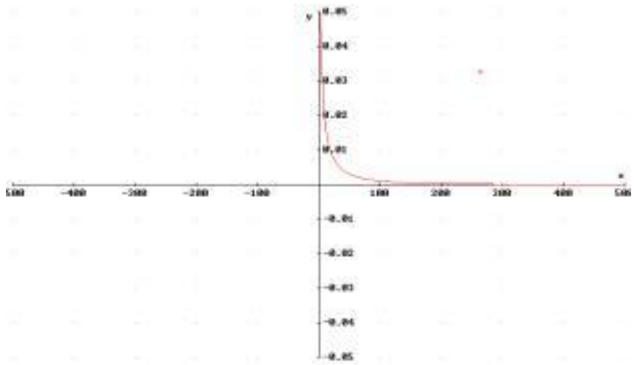
En este caso la mediana resulta ser un valor más apropiado de tendencia central que la media.

5. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} x^{-1/2} \exp(-x^{1/2}/4) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Determinar la media, la varianza, la desviación estándar, la mediana, el recorrido intercuartil y el recorrido interdecil de X.

Solución



Esta función de densidad exhibe un rápido decaimiento hacia el eje horizontal. Esto puede utilizarse para representar la edad a la que fallece una persona como resultado de las enfermedades padecidas en su niñez

El valor esperado de X es:

$$E(X) = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x^{1/2}/4)dx = 32$$

$$E(X^2) = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x^{1/2}/4)dx = 6144$$

$$E\left[X^3\right] = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} x^{5/2} \exp(-x^{1/2}/4)dx = 2949120$$

$$E\left[X^4\right] = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} x^{7/2} \exp(-x^{1/2}/4)dx = 2642411520$$

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P(X < x)} = \frac{1}{8}\int_0^{x} t^{-1/2} \exp(-t^{1/2}/4)dt = \frac{x^{1/2}\exp(-x^{1/2}/4)}{4} - \frac{x^{1/2}+4}{4(\exp(x^{1/2}))^{1/4}} + 1$$

F(x)=1/2 ; x= 7.68753

Esto demuestra cuan inapropiada es la media como única medida de tendencia central.

Los Deciles y percentiles se determinan fácilmente:

F(x)=0.1; $x_{0.1}$ = 0.177617 el cuartil primero F(x)=0.25; $x_{0.25}$= 1.32415 y el tercero

F(x)=0.75; $x_{0.75}$= 30.7495

6. Sea X una variable aleatoria que representa el número de llamadas telefónicas que recibe un conmutador en un intervalo de cinco minutos y cuya función de probabilidad está

$$p(x) = e^{-3}(3)^x / x!, \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Determinar las probabilidades de que X sea igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

b) Graficar la función de probabilidad para estos valores de X.

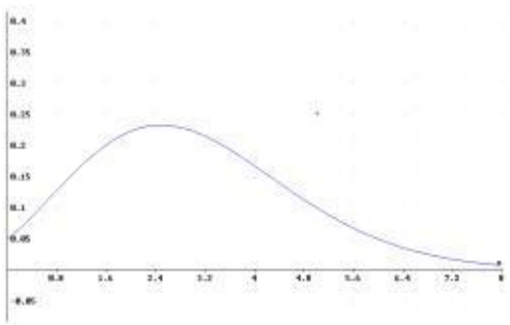
c) Determinar la función de distribución acumulativa para estos valores de X.

d) Graficar la función de distribución acumulativa.

Solución

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(x)	0,04978707	0,14936121	0,22404181	0,22404181	0,16803136	0,10081881	0,05040941	0,02160403

b)

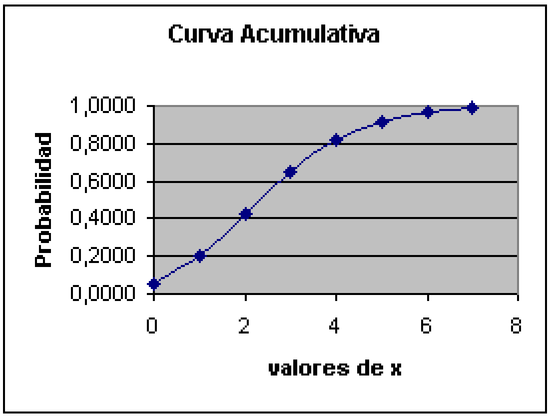


La curva está representada como si fuese continua, en realidad no es así. La representación estaría formada por una sucesión de puntos (x, p(x)) aislados que no formarían ningún tipo de curva. Sin embargo, creo que de esta forma se aprecia mejor la forma de la gráfica.

c)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
F(x)	0,0498	0,1991	0,4232	0,6472	0,8153	0,9161	0,9665	0,9881

d)



Aquí pasa lo mismo de antes, para dibujar la curva se ha hecho un trazado continuo, para apreciar mejor la forma; sin embargo, debe entenderse que la gráfica estaría formada por la sucesión de puntos aislados, exclusivamente. Puesto que se trata de una variable aleatoria discreta.

7. Sea X una variable aleatoria discreta. Determinar el valor de k para que la función p(x)=k/x, x=1, 2, 3, 4 sea la función de probabilidad de X.

Determinar P[1 ≤X ≤3].

Solución

x	P(x)	P(x)
1	1k	12/25
2	0,5k	12/50
3	0,33333333k	12/75
4	0,25k	12/100

La suma tiene que valer 1 para que sea una función de probabilidad. Luego: k+(1/2)k+(1/3)k+(1/4)k=1; 25k=12. Por tanto k=12/25.

P[1 ≤X ≤3]=p(1)+p(2)+p(3)=0.88

8.Sea X una variable aleatoria continua.

a) Determinar el valor de k, de manera tal que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.

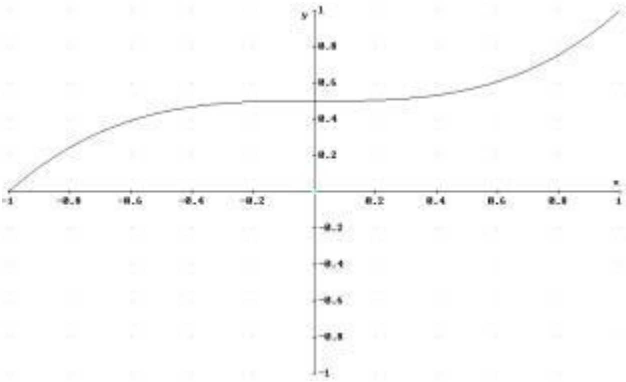
b) Determinar la función de distribución acumulativa de X y graficar F(x).

c) Calcular P(X ≥ 1/2) y P(- 1/2 ≤ X ≤1/2).

Solución

$$\int_{-1}^{1} kx^2\,dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{kx^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{k}{3}+\frac{k}{3} = \frac{2k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3/2$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & si \quad x \le -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{3}{2} t^2\,dt & -1 < x < 1 \\ 1 & si \; x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \quad si & x \le -1 \\ \frac{x^3+1}{2} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



b) Para calcular las probabilidades, empleamos la función de distribución acumulativa

P(X ≥ 1/2)=1-F(1/2)=1-9/16=7/16= 0,4375

P(- 1/2 ≤ X ≤1/2)=F(1/2)-F(-1/2)=9/16-7/16=2/16=1/8= 0,125.

9. Sea X una variable aleatoria continua.

a) Determinar el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} k\exp(-x/5) & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.

b) Graficar f(x).

c) Calcular P(X ≤ 5) y P(0 ≤ X ≤ 8).

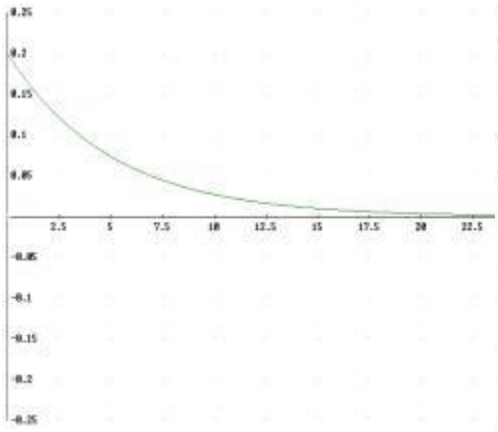
d) Determinar F(x) y graficarla.

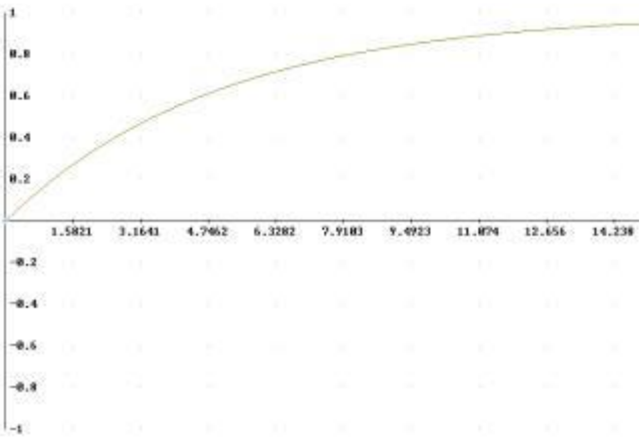
Solución

$$\int_{0}^{\infty} k\exp(-x/5)\,dx = 1; \Rightarrow 5k = 1; \; k = \frac{1}{5}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \int_{0}^{x} \frac{1}{5}\exp(-t/5)\,dt & 0 < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1-\exp(-x/5) & 0 < x < \infty \end{cases}$$

Gráfica de f(x) **Gráfica de F(x)**





10. La duración en horas de un componente electrónico, es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es F(x) = 1 - exp(-x/100), x > 0.

a) **Determinar la función de probabilidad de X. b) Determinar la probabilidad de que el componente trabaje más de 200 horas.**

Solución

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}\exp(-x/100) & 0 < x < \infty \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$P(X \geq 200)=1-F(200)=1-(1-\exp(-2))= \exp(-2)= 0.135335$

11. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

a) **Graficar F(x).**

b) **Obtener P(X < 1/2) y P(X > 3/4).**

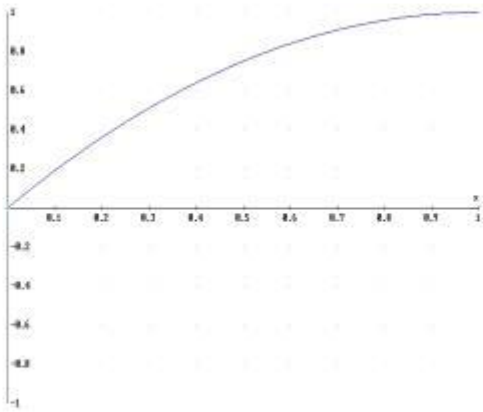
c) **Determinar f(x).**

Solución

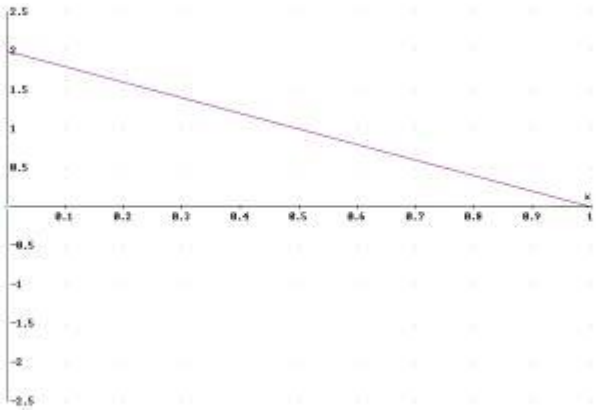
a) y c)

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & otro \quad valor \end{cases}$$

Gráfica de F(x)



Gráfica de f(x)



b) P(X < 1/2)=F(1/2)=1-1/4=3/4

c) P(X > 3/4)=1-F(3/4)=1-15/16=1/16

12. Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente información

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
p(x)	**0.05**	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.10**	**0.05**	**0.05**

encontrar E(X) y Var(X).

Solución

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Suma
p(x)	0,05	0,1	0,1	0,1	0,2	0,25	0,1	0,05	0,05	1
x_ip_i	0	0,1	0,2	0,3	0,8	1,25	0,6	0,35	0,4	4
x_ip_i	0	0,1	0,4	0,9	3,2	6,25	3,6	2,45	3,2	20,1

E[X]=4

Var(X)=E[X^2]-E^2[X]=20,1-16=4,1-

13. Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de 50.000 € para hombres cuya edad se encuentra entre los 30 y 35 años. Con base en las tablas actuariales el número de fallecimientos al año, para este grupo, es de 5 por cada mil. Si X es la variable aleatoria que representa la ganancia de la compañía de seguros, determinar el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda, a pesar de tener un número grande de tales seguros.

Solución

Calculamos el valor para una ganancia nula

E[X]=0=C*995/1000-50000*5/1000 => 995C=250000; C=250000/995=251,26 €

14. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a) E(X)   b) Var (X)

15. Sea X una variable aleatoria que representa la magnitud de la desviación, a partir de un valor prescrito, del peso neto de ciertos recipientes, los que se llenan mediante una máquina. La función de densidad de probabilidad de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 0 < x < 10 \\ 0 & \textit{otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a) E(X)   c) α_3(X)

b) Var(X)   d) α_4(X)

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 5$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X),\ E(X^2) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = \frac{100}{3}$$

Luego Var(X)=100/3-25=25/3

$$E(X^3) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{40}\right]_0^{10} = 250$$

Luego $E(X-\mu)^3$=250-3*(100/3)*5+2*125=0; α_3(X)=0

$$E[X4] = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{50}\right]_0^{10} = 2000$$

$E[(X-\mu)^4]$=2000-4*250*5+6*(100/3)*25-3*625=125.

Luego α_4(X)=125/(25/3)^2=1,8