Menú principal

Ampliación de variables aleatorias

Esquema

---

1. Funciones generadoras de momentos

Definición

Sea X una variable aleatoria. El valor esperado:

$$m_X(t) = E\left[\exp(tX)\right] \qquad -c \leq t \leq c$$

recibe el nombre de ***función generadora de momentos***.

Si X es una variable aleatoria discreta

$$m_X(t) = E\left[\exp(tX)\right] = \sum_x \exp(tx).p(x)$$

Si la variable es continua

$$m_X(t) = E\left[\exp(tX)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f(x) dx$$

Puede demostrarse que si la función generadora de momentos existe, entonces es única y determina por completo a la distribución de probabilidad de X. Es decir, si dos variables aleatorias tienen la misma función generatriz de momentos, entonces, las dos variables tienen también la misma distribución de probabilidad.

Por otra parte, si la función generadora de momentos existe, entonces es indefinidamente derivable en t=0. Esto nos asegura que generará todos los momentos, de cualquier orden, de X en cero. En efecto:

$$m_X(0) = E(e^0) = 1$$

Derivando

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[E\left(\exp(tX)\right)\right]\Big|_{t=0} = \textit{permu tan do los símbolos de diferenciación y esperanza}$$

$$E\left[\frac{d}{dt}\left[\exp(tX)\right]\right]\Bigg|_{t=0} = E\{X\exp(tX)\}\big|_{t=0} = E(X) = \mu$$

Para la derivada segunda, se tiene:

$$\left.\frac{d^2m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\left[E(\exp(tX))\right]\Big|_{t=0} = E\left[\frac{d^2}{dt^2}\exp(tX)\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$E\left[\frac{d}{dt}X.\exp(tX)\right]\Bigg|_{t=0} = E\left[X^2\exp(tX)\right]\Big|_{t=0} = E\left[X^2\right] = \mu'_2$$

En general, siguiendo con el proceso de diferenciación, se obtiene:

$$\left.\frac{d^r m_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E\left[X^r\right] = \mu'_r$$

El mismo resultado se obtendría si se reemplaza la función exponencial por su desarrollo en serie de potencias alrededor de t=0.

$$E\left[\exp(tX)\right] = E\left[1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \ldots + \frac{t^rX^r}{r!} + \ldots\right]$$

al derivar con respecto a t y calcular sus derivadas en t=0, se llegaría al mismo resultado.

2. Funciones generadoras de momentos de algunas distribuciones discretas.

- **Binomial**

  La función de probabilidad de la distribución binomial B(n; p) es

$$p(x;n,p)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-x)!\,x!}p^x(1-p)^{n-x};\ x=0,1,2,\ldots,n & 0\le p\le 1;\ n\ entero\\ 0\quad para\ cualquier\ otro\ valor\end{cases}$$

La función generadora de momentos

$$m_X(t)=E\left(\exp(tX)\right)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\frac{n!}{(n-x)!\,x!}p^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{(n-x)!\,x!}\left(e^tp\right)^x(1-p)^{n-x}=$$

$$Desarrollando=(1-p)^n+n(e^tp)(1-p)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}(e^tp)^2(1-p)^{n-2}+\ldots+(e^tp)^n=$$

$$\left[(1-p)+e^tp\right]^n$$

- **Poisson**

La función de probabilidad de una variable aleatoria de Poisson de parámetro λ es:

$$p(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,\ldots;\quad \lambda>0\\ 0\quad para\ cualquier\ otro\ valor.\end{cases}$$

La función generadora de momentos viene dada por:

$$m_X(t)=E\left[\exp(tX)\right]=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$$

- **Binomial negativa**

La función de probabilidad de una variable aleatoria binomial negativa de parámetros k y p es:

$$p(x;k,p)=\begin{cases}\dbinom{x+k-1}{k-1}p^k(1-p)^x; & x=0,1,2,\ldots\\ 0\quad otro\ valor\end{cases}$$

La función generadora de momentos está dada por

$$m_X(t) = E[\exp(tX)] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\binom{x+k-1}{k-1}p^k(1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{(x+k-1)!}{(k-1)!\,x!}p^k\left[(1-p)e^t\right]^x =$$

$$Desarrollando = p^k + kp^k\left[(1-p)e^t\right] + \frac{(k+1)k}{2!}p^k\left[(1-p)e^t\right]^2 + \ldots = \left[\frac{1}{p} - \frac{(1-p)e^t}{p}\right]^{-k} =$$

$$\left[\frac{1-(1-p)e^t}{p}\right]^{-k} = \frac{p^k}{\left[1-(1-p)e^t\right]^k}$$

3. Funciones generadoras de momentos de algunas distribuciones continuas.

- **Normal**

La función de densidad de una variable aleatoria que se distribuye según una normal de parámetros μ y σ está dada por

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; \quad -\infty < x < \infty;\ \sigma > 0; \quad -\infty < \mu < \infty$$

Empecemos calculando la función generadora de momentos centrales.

$$m_{X-\mu}(t) = E[\exp(t(X-\mu))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(t(x-\mu)).\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)\}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2\}\right)dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\{[(x-\mu)-\sigma^2 t)]^2 - \sigma^4 t^2\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\exp\left(\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{-2\sigma^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma}\right)^2\right)dx = \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

En el último termino, la parte de la integral y el factor donde se encuentra la raíz cuadrada constituyen la función de distribución de una variable aleatoria normal de parámetros N ($\mu+\sigma^2 t$; σ) extendida a toda la recta real, valiendo, por tanto, 1.

La función generadora de momentos respecto del origen puede obtenerse fácilmente de

$$m_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(X--\mu)}\right] = \exp(-t\mu).\exp(tX) = \exp(-t\mu).m_X(t). \quad \textit{Luego}$$
$$m_{X-\mu}(t) = \exp(-t\mu).m_X(t). \quad \textit{Despejando}$$
$$m_X(t) = \exp(t\mu).m_{X-\mu}(t) = \exp(t\mu).\exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

- **Uniforme**

La función de densidad de una variable aleatoria uniforme está dada por

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 \quad otro \quad valor \end{cases}$$

La función generadora de momentos se obtiene de la manera siguiente:

$$mX(t) = E\left[\exp(tX)\right] = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\frac{1}{t}\left[e^{tx}\right]_a^b = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

- **Distribución Gama**

La función de densidad de una variable aleatoria X que se distribuye según una gama de parámetros α y θ viene dada por

$$f(x;\alpha,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right); \ x > 0, \quad \alpha,\theta > 0 \\ 0 \quad otro \quad valor \end{cases}$$

La función generadora de momentos se obtiene

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \frac{1}{\mathrm{T}(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_0^{\infty} \exp(tx).x^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx = \frac{1}{\mathrm{T}(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\exp\left(tx - \frac{x}{\theta}\right)dx =$$
$$\frac{1}{\mathrm{T}(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\exp\left[\left(t - \frac{1}{\theta}\right)x\right]dx. \ \textit{Haciendo el cambio} \quad u = (t - 1/\theta)x; \ du = (t - 1/\theta)dx.$$
$$u = \frac{t\theta - 1}{\theta}x = -\left(\frac{1-\theta t}{\theta}\right)x; \quad du = -\left(\frac{1-\theta t}{\theta}\right)dx$$

Queda

$$m_X(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\int_0^{\infty}\frac{\theta^{\alpha-1}.u^{\alpha-1}}{(1-\theta t)^{\alpha-1}}\exp(-u).\left(\frac{\theta}{1-\theta t}\right)du=\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\theta t)^{\alpha}}\int_0^{\infty}u^{\alpha-1}\exp(-u)du=$$
$$\frac{1}{(1-\theta t)^{\alpha}}=(1-\theta t)^{-\alpha}$$

- **Función exponencial negativa**

La función de densidad de una variable aleatoria X que se distribuye según una exponencial negativa de parámetro θ, está dada por

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}); & x>0,\theta>0\\ 0 & otro\,valor\end{cases}$$

La función generadora de momentos se obtiene

$$m_X(t)=E[\exp(tX)]=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty}\exp(tx).\exp(-x/\theta)dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty}\exp\left(-x\left(\frac{1-\theta t}{\theta}\right)\right)dx$$
$$hagamos\ el\ cambio\ u=-\left(\frac{1-\theta t}{\theta}\right)x;\quad du=-\left(\frac{1-\theta t}{\theta}\right)dx$$

Queda

$$m_X(t)=\frac{1}{\theta}\int_0^{-\infty}\exp(u)\left(-\frac{\theta}{(1-\theta t)}\right)du=-\frac{1}{(1-\theta t)}[e]_0^{-\infty}=-\frac{1}{(1-\theta t)}[0-1]=\frac{1}{(1-\theta t)}$$

4. Distribución de una función de una variable aleatoria.

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$. Sea Y=g(X). Supongamos que g es una función inyectiva, creciente y diferenciable, entonces es posible determinar la función de densidad de Y de la manera siguiente:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\le g^{-1}(y))\ Entonces$$
$$F_Y(y)=F_X(g^{-1}(y))$$

Diferenciando y aplicando la regla de la cadena:

$$f_Y(y)=\frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dx}\frac{dy}{dx}=f_X(g^{-1}(y))\frac{dx}{dy}$$

Si g(x) fuera decreciente, el resultado sería el mismo salvo que la derivada de una función decreciente sería negativa.

Teorema

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$ y defínase Y=g(X). Si y=g(x); $x=g^{-1}(y)$ son funciones univaluadas, continuas y diferenciables y si y=g(x) es una función monótona, la función de densidad de Y está determinada por

$$f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

donde

$$J = \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

es el Jacobiano de la transformación.

Ejemplo 1

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x;μ,θ,α) donde μ,θ y α son los parámetros de localización, escala y forma, respectivamente. El efecto del parámetro de localización puede notarse mas claramente si se considera la variable aleatoria normalizada Y=(X-μ)/θ el cual no contiene a μ ni a θ. Mediante el empleo del teorema, la función de densidad de Y es:

Despejando x= θy + μ; y *dx/dy*= θ. Se tiene:

$$f_Y(y) = \theta f_X(\theta y + \mu)$$

En particular si X es una variable aleatoria gama cuya función de densidad es

$$f(x;\alpha,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right); \ x>0, \quad \alpha,\theta>0 \\ 0 \quad otro \quad valor \end{cases}$$

La función de densidad de Y=X/θ es:

Despejando x= θy; *dx/dy*= θ. Por tanto

$$f_G(y;\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}\exp(-y); \ y>0$$

De manera similar si X es una distribución Weibull con función de densidad de probabilidad de

$$f(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\theta^{\alpha}}x^{\alpha-1}\exp\left(-\left[\dfrac{x}{\theta}\right]^{\alpha}\right); x>0,\theta>0,\alpha>0\\ 0\end{cases}$$

La función de densidad de Y=X/θ es:

Despejando x= θy; *dx/dy*= θ. Por tanto

$$f_W(y;\alpha)=\alpha y^{\alpha-1}\exp(-y^{\alpha});\ y>0$$

Si no existe parámetro de forma y si μ y θ son la media y la desviación típica de X, entonces la función de densidad de Y dará lugar a una función de densidad libre de parámetros con media cero y desviación típica 1. Un ejemplo de lo anterior lo tenemos con la función de densidad de la distribución normal estandarizada.

Ejemplo 2

Si la variable aleatoria X se encuentra uniformemente distribuida en el intervalo (0; π). Obtener la función de densidad de probabilidad de la función Y=c.sen(X) donde c es una constante positiva cualquiera.

La función de densidad de X es

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\ si\ 0<x<\pi$$

Despejemos x:

$$x=arcsen(y/c);\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{c^2-y^2}}=(c^2-y^2)^{-1/2}$$

Como sen(x) es creciente para (0, π/2) y decreciente para (π/2, π) se obtiene:

Para el intervalo (0, π/2)

$$f_1(y)=\frac{1}{\pi}(c^2-y^2)^{-1/2};\quad 0\le y\le c$$

y para el intervalo (π/2, π)

$$f_2(y)=\frac{1}{\pi}(c^2-y^2)^{-1/2};\quad 0\le y\le c$$

La función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = f_1(y) + f_2(y) = \frac{2}{\pi}(c^2 - y^2)^{-1/2}; \quad 0 \le y \le c$$

Ejemplo 3

Sea Z una variable aleatoria, N(0; 1), normal con media 0 y desviación típica 1. Demostrar que $Y = Z^2$ es una distribución Chi-cuadrado con un grado de libertad.

La función generadora de momentos de Z^2 es:

$$m_{Z^2}(t) = E\left[\exp(tZ^2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tz^2) f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tz^2)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tz^2 - z^2/2)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}(1-2t)\right)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{z}{(1-2t)^{-1/2}}\right]^2\right)dz$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-2t)^{-1/2}} \frac{(1-2t)^{-1/2}}{1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{z}{(1-2t)^{-1/2}}\right]^2\right)dz = (1-2t)^{-1/2}$$

que como sabemos es la función generadora de momentos de la distribución chi-cuadrado con un grado de libertad.