Ejercicios

1. Una tienda de artículos para el hogar vende 3 tipos diferentes de frigoríficos. Sean X_1, X_2, y X_3 las variables aleatorias que representan el volumen de ventas mensual para cada uno de los 3 tipos. Si X_1, X_2, y X_3 son v.a independientes y normalmente distribuidas con medias 8.000 € , 15.000 € y 12.000 €, y desviaciones estándar de 2.000 € , 5.000 € y 3.000 €, respectivamente, obtener la probabilidad de que, para un mes en particular, el volumen de ventas total para los tres frigoríficos sea mayor de 50.000 €

Solución

X_1 sigue una N(8.000; 2.000)

X_2 sigue una N(15.000; 5.000)

X_3 sigue una N(12.000; 3.000)

La variable $Y = X_1 + X_2 + X_3$ sigue una normal $N(8.000+15.000+12.000; (2.000^2+5.000^2+3.000^2)^{1/2})=N(35.000; 6164,41)$

Por tanto, la probabilidad $P(Y>50.000)=0,0075$

2. Para un determinado nivel de ingresos, el ministerio de hacienda sabe que las cantidades declaradas por concepto de deducciones médicas X_1, contribuciones caritativas X_2 y gastos varios X_3, son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con medias 400 €, 800 € y 100 € y desviaciones estándar de 100 €, 250 € y 40 €, respectivamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad declarada por concepto de estas tres deducciones, no sea mayor de 1.600 €.

b) Si una persona con este nivel de ingresos declara por concepto de estas deducciones un total de 2.100 €, ¿qué tan probable es tener una cantidad igual o mayor a este monto bajo las condiciones dadas?.

Solución

Sea X_1 una v.a N(400, 100); X_2 una v.a N(800, 250) y X_3 una v.a N(100, 40) independientes entre sí. Entonces la variable $Y = X_1 + X_2 + X_3$ sigue una normal $N(1.300; (100^2+250^2+40^2)^{1/2})$ es decir, N(1.300; 272,21). Por tanto, la probabilidad $P(Y<1.600)=0,865$.

b) $P(Y>=2.100)=0,00165$.

3. Para una cierta prueba de aptitud se sabe por experiencia que el número de aciertos es 1.000 con una desviación estándar de 125. Si se aplica la prueba a 100 personas seleccionadas al azar, aproximar las siguientes probabilidades que involucran a la media muestral $\overline{X}$

$$a)\ P(985 < \overline{X} < 1015) \qquad b)\ P(960 < \overline{X} < 1040)$$
$$c)\ P(\overline{X} > 1020) \qquad d)\ P(\overline{X} < 975)$$

Solución

Como n=100 es mayor que 30, podemos aplicar el teorema central del límite y tenemos que la v.a $\overline{X}$ se puede aproximar por una normal

$$\overline{X} \to N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Por tanto

$$\overline{X} \to N(1000, \frac{125}{\sqrt{100}}) = N(1000;12{,}5)$$

Luego

a) P(985< $\overline{X}$ <1015)=0,885-0,115=0,77.

b) P(960< $\overline{X}$ <1040)=0,999-0,001=0,998

c) P($\overline{X}$ >1020)=0,055

d) P($\overline{X}$ <975)=0,023

4 Un contratista piensa comprar una gran cantidad de lámparas de alta intensidad a cierto fabricante. Éste asegura al contratista que la duración promedio de las lámparas es de 1000 horas con una desviación típica de 80 horas. El contratista decide comprar las lámparas sólo si una muestra aleatoria de 64 de éstas da como resultado una vida promedio de por lo menos 1000 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que el contratista adquiera las lámparas?

Solución.

Con n=64, la media muestral se puede aproximar por una normal (Teorema central del límite)

$$\overline{X} \to N(1000; \frac{80}{\sqrt{64}}) = N(1000;10)$$

Por tanto, la P(X>=1000)=0,5.

5. Un inspector nacional de pesos y medidas visita una planta de empacado para verificar que el peso neto de las cajas sea el indicado en éstas. El gerente asegura al inspector que el peso promedio de las cajas es de 750 gr con una desviación estándar de 5 gr. El inspector selecciona, al azar, 100 cajas y encuentra que el peso promedio es de 748 gr. Bajo estas condiciones, ¿qué tan probable es tener un peso de 748 gr o menos? ¿Qué actitud debe tomar el inspector?

Solución

$$\overline{X} \rightarrow N(750; \frac{5}{\sqrt{100}}) = N(750;\ 0{,}5)$$

Por tanto, la probabilidad de que

P($\overline{X}$ <=748)=0,000031686

Rechazar la aseveración del gerente.

6. En la producción de cierto material para soldar se sabe que la desviación típica de la 25 Kg . ¿Cuál debe ser la tensión de ruptura promedio del proceso si, con base a una muestra aleatoria de 50 unidades, la probabilidad de que la media muestral tenga un valor superior a 250 kg es de 0,95?

Solución

$$\overline{X} \rightarrow N(\mu; \frac{25}{\sqrt{50}})$$

Si la P($\overline{X}$ >250)=0,95 se deduce que:

$$P(\frac{\overline{X}-\mu}{25/\sqrt{50}} > \frac{250-\mu}{25/\sqrt{50}}) = 0{,}95 \ siendo \ \ Z = \frac{\overline{X}-\mu}{25/\sqrt{50}} \rightarrow N(0{,}1)$$

Por tanto, si P(Z>z_α)=0,95; se deduce que z_α = -1,645. Luego:

$$\frac{250-\mu}{25/\sqrt{50}} = -1{,}645$$

Despejando, se tiene:

μ=250+1,645*3,5355=255,82

7. Si se obtiene una muestra aleatoria de n=16 de una distribución normal con media y varianza desconocida, obtener la $P(S^2/\sigma^2<=2,041)$.

Solución

Sabemos que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightarrow \quad \chi_{n-1}{}^2$$

Por tanto

$$P(S^2 / \sigma^2 \leq 2{,}041) = P\left(\frac{15S^2}{\sigma^2} \leq 15 * 2{,}041\right) = P\left(\frac{15S^2}{\sigma^2} \leq 30{,}615\right) =$$
$$P(X \leq 30{,}615) = 1 - 0{,}00988721 = 0{,}99$$

8. Un fabricante de cigarrillos asegura que el contenido promedio de nicotina, en una de sus marcas, es de 0,6 mg por cigarrillo. Una organización independiente mide el contenido de nicotina de 16 cigarrillos de esta marca y encuentra que el promedio y la desviación estándar es de 0,75 y 0,175 mg, respectivamente, de nicotina. Si se supone que la cantidad de nicotina en estos cigarrillos es una variable normal, ¿qué tan probable es el resultado muestral dado el dato proporcionado por el fabricante?

Solución

Sabemos por la teoría que el estadístico

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

sigue una t-Student con n-1 grados de libertad.

La probabilidad de que

$$P(T \geq t_0) = P(T \geq \frac{0{,}75 - 0{,}6}{0{,}175 / \sqrt{16}}) = P(T \geq \frac{0{,}15}{0{,}04375}) = P(T \geq 3{,}4286) = 0{,}001866097$$

Si la media es 0,60, la probabilidad de observar un valor de T mayor o igual de 3,4286 es de 0,001866097. Valor muy pequeño que nos hace pensar que la media poblacional no es 0,60.

9. El gerente de una refinería piensa modificar el proceso para producir gasolina a partir del petróleo crudo. El gerente hará la modificación sólo si la gasolina promedio que se obtiene por este proceso (expresada como un porcentaje del crudo) aumenta su valor con respecto al proceso en uso. Con base en un experimento de laboratorio y mediante el empleo de dos muestras aleatorias de tamaño 12, una para cada proceso, la gasolina promedio para el

proceso en uso es de 24,6 con una desviación estándar de 2,3; y para el proceso propuesto fue de 28,2 con una desviación estándar de 2,7. El gerente piensa que los resultados proporcionados por los dos procesos son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianzas iguales. Con base en esta evidencia, debe adoptarse el nuevo proceso?

Solución

Sabemos que si X sigue una N(μ_X, σ) e Y una N(μ_Y, σ) donde X e Y son variables aleatorias independientes con varianzas iguales y desconocidas, la variable aleatoria:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{S_p\sqrt{\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}$$

sigue una t_Student con $n_X + n_Y - 2$ grados de libertad

Si suponemos que no hay diferencia en los dos tipos de procesos, sino que ambas muestras proceden del mismo proceso, entonces μ_X y μ_Y serán iguales, en tal caso

$$S_p = \sqrt{\frac{11.2,3^2 + 11.2,7^2}{12 + 12 - 2}} = 2,508$$

Luego:

$$T = \frac{24,6 - 28,2 - 0}{2,508.\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = -3,5160$$

La probabilidad de que $P(T \leq t_0) = P(T \leq -3,5160)$ en una t_Student con 22 grados de libertad vale: $P(T \leq -3,5160) = 0,00097$. Lo que es sumamente improbable, en consecuencia parece más aceptable rechazar que las media son iguales.

10. El volumen de ventas diario durante los 12 meses pasados fue, en promedio, de 2.000 €. El gerente piensa que los próximos 25 días serán típicos con respecto al volumen de ventas normal. Al finalizar los 25 días, el volumen promedio de ventas y su desviación estándar fueron de 1.800 € y 200 €, respectivamente. Supóngase que el volumen de ventas diario es una variable aleatoria normal. Si usted fuese el gerente, ¿tendría alguna razón para creer, con base en este resultado, que hubo una disminución en el volumen de ventas diario?

Solución

Si μ fuese realmente igual a 2000€ ¿cuál es la probabilidad de obtener una media no mayor de 1.800 € en una muestra de tamaño 25 con una estimación de σ de 200€ ?

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Sigue una t-Student con 24 grados de libertad.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{1800 - 2000}{\frac{200}{\sqrt{25}}} = \frac{-200}{40} = -5$$

Por tanto

$$P(T \leq -5) = 0,00002$$

Probabilidad muy baja que nos hace pensar que las ventas han disminuido.

11. La variación diaria en el número de unidades de un producto, el cual manejan dos operadores A y B, debe ser la misma. Con base en una muestra de tamaño n_A=16 días y n_B = 21 días, el valor calculado de las desviaciones estándar muestrales es de s_A=8,2 unidades y s_B=5,8 unidades. Si el numero de éstas, manejadas por los dos operadores, por día, son dos variables aleatorias independientes que se encuentran aproximadas, en forma adecuada, por distribuciones normales, ¿existe alguna razón para creer que las varianzas son iguales?

Solución

Por teoría sabemos que el estadístico

$$\frac{S_x^2 / \sigma_x^2}{S_y^2 / \sigma_y^2} \to F_{nx-1;ny-1}$$

sigue una F con n_X-1 y n_Y-1 grados de libertad. Si suponemos que σ^2_X y σ^2_Y son iguales, el estadístico F se reduce a $F = S^2_X / S^2_Y$ con 15 y 20 grados de libertad.

S^2_X / S^2_Y =1,9988. La P(F>1,999)= 0,074. Una probabilidad no lo suficientemente pequeña, que nos hace dudar de la desigualdad de las varianzas.