Menú principal

# Estimación Bayesiana

---

## Esquema:



---

## 1. Estimación bayesiana

El enfoque bayesiano se basa en la interpretación subjetiva de la probabilidad, el cual considera a ésta como un grado de creencia con respecto a la incertidumbre.

Un parámetro es visto como una variable aleatoria a la que, antes de la evidencia muestral, se le asigna una distribución a priori de probabilidad, con base en un cierto grado de creencia con respecto al comportamiento aleatorio. Cuando se obtiene la evidencia muestral, la distribución *a priori* es modificada y entonces surge una distribución *a posteriori* de probabilidad.

[Volver al principio]

## 2. Estimación puntual bayesiana.

Dado que se considera un parámetro como una variable aleatoria, se denomina a éste con el símbolo Θ y la realización de esta con el símbolo θ. Supóngase que Θ es continua con función de densidad (*a priori*) incondicional $f_{\Theta}(\theta)$, la cual refleja la creencia *a priori* con respecto a la incertidumbre de Θ.

La información muestral se encuentra representada por *n* variables aleatorias IID $X_1, X_2, \ldots, X_n$, con función de densidad condicional $f(x \mid \theta)$,condicional común sobre la realización de θ de Θ.

La función de verosimilitud, condicionada a un valor particular de θ, es:

$$L(x_1, x_2, \ldots x_n \mid \theta) = f(x_1 \mid \theta).f(x_2 \mid \theta)\ldots f(x_n \mid \theta)$$

Mediante el empleo de teorema de bayes, la función de densidad *a posteriori* de Θ dado el resultado muestral

$$\underline{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

es

$$f(\theta \mid \underline{x}) = \frac{L(\underline{x} \mid \theta) f_{\Theta}(\theta)}{\int_{\Theta} L(\underline{x} \mid \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta}$$

Se sabe que la densidad *a posteriori* representa el grado de creencia modificado con respecto a la incertidumbre de Θ. Pero, ¿cómo debe de usarse la densidad *a posteriori* para obtener un estimador puntual de θ? Para este enfoque se tiene en cuenta lo que se denomina como función de pérdida, que representa la consecuencia económica de haber escogido a t que es también una función del resultado muestral, en lugar del verdadero valor θ. Esta función se denota como *l (t, θ)* y es no negativa, valiendo 0 cuando t= θ.

## Definición

Sea $f_{\Theta}$ (θ) una función de densidad *a priori* de un parámetro Θ, y L ($x_1$, $x_2$, …, $x_n$ | θ) la función de máxima verosimilitud de una muestra aleatoria IID condicionada a la realización θ de Θ,. Además, sea f θ |x) la función de densidad *a posteriori* de Θ, y sea (*l (t, θ)* la función de pérdida. El estimador de Bayes de θ, T=u(X1, X2, …,Xn) es aquél para el cuál el valor esperado de la función de pérdida dada por

$$E[l(t,\Theta)] = \int_{\Theta} l(t,\theta) f(\theta \mid \underline{x}) d\theta$$

es mínimo.

La función de pérdida es a veces difícil de especificar , ya que las consecuencias económicas no son siempre fácilmente medibles. Una función que suele utilizarse en muchos problemas es:

$$l(t,\theta) = (t-\theta)^2$$

Puede demostrarse que el estimador de Bayes de θ para esta función es igual a la esperanza *a posteriori* E [Θ | x ], de Θ; es decir, la media de la distribución *a posteriori* de Θ es el estimador de Bayes para esta función.

[Volver al principio]

# 3. Estimación por intervalo

## Definición

Sea f (θ|x) la función de densidad *a posteriori* de Θ condicionada por el resultado muestral t, sean a y b límites tales que

$$P(a < \Theta < b \mid \underline{x}) = \int_a^b f(\theta \mid \underline{x}) d\theta = \gamma \quad \textit{donde a y b son funciones de } \underline{x}$$

Entonces el intervalo *(a, b)* es un intervalo bayesiano tal, que la probabilidad de que θ se encuentre en *(a, b)* es γ.

En este caso, a diferencia de los intervalos de confianza, es un verdadero intervalo de probabilidad.

Veamos un ejemplo

Sean X1, X2, …, Xn la muestra aleatoria de una distribución normal con media desconocida y varianza $\sigma^2$ conocida. Supóngase que la media es un parámetro aleatorio al cuál se piensa asignar una distribución de probabilidad *a priori* normal, con una función de densidad

$$f_M(\mu) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(\mu-\mu_0)/2\sigma_0{}^2\right], \quad -\infty < \mu < \infty$$

$\mu_0$ y $\sigma_0^2$ son la media y la varianza *a priori*. La función de verosimilitud, dada la ocurrencia de $\mu$ es:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp(-\sum_i (x_i-\mu)^2 / 2\sigma_0{}^2))$$

Entonces puede demostrarse que la función de densidad *a posteriori* de la media condicionada sobre x también es normal con media

$$E[M \mid \underline{x}] = \frac{n\sigma_0{}^2\bar{x} + \mu_0\sigma^2}{n\sigma_0{}^2 + \sigma^2} \qquad [1]$$

y varianza

$$Var[M \mid \underline{x}] = \frac{\sigma^2\sigma_0{}^2}{n\sigma_0{}^2 + \sigma^2}$$

De esta forma el estimador de Bayes de $\mu$ para una función de pérdida

$$l(t,\theta) = (t-\theta)^2$$

está dado por [1]

[Volver al principio]