Menú principal

Esquema del capítulo

Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.

Se definen como las agrupaciones de n elementos escogidos de entre los m, repetidos o sin repetir, distinguiendo como distintas dos agrupaciones que:

a) Tienen al menos un elemento diferente.

b) O teniendo los mismos, no están repetidos el mismo número de veces.

c) O teniendo idénticos elementos y el mismo número de veces cada uno, están ordenados de manera diferente.

Formación y cálculo. Para formar las variaciones con repetición de n elementos (n puede ser mayor que m) tomados de entre los m, procedemos ordenadamente a partir de las de orden 1.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$$

añadiendo a cada una de las variaciones de orden 1, cada uno de los m elementos, de menor a mayor índice, tendremos la de orden 2.

$$a_1a_1, \quad a_1a_2, \quad \ldots, \quad a_1a_m$$

$$a_2a_1, \quad a_2a_2, \quad \ldots, \quad a_2a_m$$

…

$$a_m a_1,\ a_m a_2,\ \ldots,\ a_m a_m.$$

A cada una de estas les añadimos, ordenadamente, cada uno de los m elementos, y obtenemos las de orden 3.

$$a_1 a_1 a_1,\ a_1 a_1 a_2,\ \ldots,\ a_1 a_1 a_m$$

$$a_1 a_2 a_1,\ a_1 a_2 a_2,\ \ldots,\ a_1 a_2 a_m$$

...

$$a_m a_m a_1,\ a_m a_m a_2,\ \ldots,\ a_m a_m a_m.$$

Y, así sucesivamente: para obtener las de orden n, partimos de las de orden n-1, y a cada una de ellas le vamos añadiendo cada uno de los m elementos, de menor a mayor índice.

$$a_1 a_1 \ldots a_1 a_1,\ a_1 a_1 \ldots a_1 a_2,\ \ldots,\ a_1 a_1 \ldots a_1 a_m$$

$$a_1 a_1 \ldots a_2 a_1,\ a_1 a_1 \ldots a_2 a_2,\ \ldots,\ a_1 a_1 \ldots a_2 a_m$$

...

$$a_m a_m \ldots a_m a_1,\ a_m a_m \ldots a_m a_2,\ \ldots,\ a_m a_m \ldots a_m a_m.$$

El cálculo del número de variaciones con repetición de n elementos tomados de n en n es sencillo teniendo en cuenta que las variaciones de orden n se obtienen añadiendo m elementos a cada una de las de orden n-1, y que las variaciones de orden 1 son m. Se tiene, pues, que:

$$VR_{m,n} = VR_{m,n-1}.m$$

$$VR_{m,1} = m$$

Por inducción se tiene:

$$VR_{m,2} = VR_{m,1}.m = m.m = m^2$$

$$VR_{m,3} = VR_{m,2}.m = m^2.m = m^3$$

y finalmente:

$$VR_{m,n} = m^n$$

[Volver al principio]

Permutaciones con repetición de m elementos donde hay α elementos iguales entre sí, β iguales entre sí pero distintos de los anteriores, etc.

A las distintas agrupaciones u ordenaciones de estos m elementos, donde en cada una de ellas, uno se repite exactamente α veces, otro β veces, etc., y entendiendo que dos agrupaciones son diferentes cuando, por lo menos, dos posiciones determinadas aunque pueden ser cualesquiera, están ocupadas por elementos distintos.

Formación y cálculo.

Para obtener su número $P_m^{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)}$ consideremos formadas todas estas permutaciones con repetición en un cuadro, y en un primer momento, sustituyamos en cada permutación los α elementos iguales por otros tantos distintos, permutemos estos α elementos entre sí, dejando invariables a los m-α elementos restantes. Por cada de estas permutaciones tendremos $\alpha!$ permutaciones distintas. Luego en total habrá $\alpha!\,P_m^{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)}$ nuevas. Escojamos ahora una cualquiera de ellas y sustituyamos los β elementos iguales por otros tantos distintos, permutémoslos entre sí manteniendo invariables al resto de los elementos. Cada una de estas permutaciones da lugar a $\beta!$ nuevas permutaciones. Por lo que en total habrá $\alpha!\,\beta!\,P_m^{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)}$. Continuemos de esta manera hasta llegar a los últimos λ elementos que son iguales entre sí; sustituyámoslos por otros tantos distintos, cada una de las anteriores agrupaciones dará lugar a $\lambda!$ nuevas, permutando estos elementos entre sí. Por lo que el número total de nuevas permutaciones será: $\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,P_m^{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)}$

Como $\alpha+\beta+\ldots+\lambda = m$, este número será también igual al número de permutaciones de m elementos. Por tanto se tiene:

$$P_m = \alpha!\ \beta!\ ...\ \lambda!\ P_m^{(\alpha,\beta,.....\lambda)}$$

y en consecuencia:

$$P_m^{(\alpha,\beta,.....\lambda)} = \frac{P_m}{\alpha!\,\beta!...\lambda!}$$

[Volver al principio]

Combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.

Pudiendo ser n mayor que m. Se definen como las agrupaciones de n elementos escogidos de entre los m, iguales o distintos; entendiendo que dos agrupaciones se considerarán diferentes si:

a) Tienen, al menos, un elemento distinto.

b) Si, teniendo los mismos elementos, no se repiten el mismo número de veces.

Conviene destacar, para diferenciarlas de las variaciones con repetición, que aquí no se tiene en cuenta para nada el orden en el que aparecen los elementos. Convenimos, pues, para un mejor estudio, colocar en primer lugar, los elementos con menor índice, quedando pues, todos los elementos repetidos juntos.

Formación y cálculo. Para formar las combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n, comenzamos con las de orden 1.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$$

A continuación, para formar las de orden 2, añadimos a cada una de estas, cada uno de los elementos que tienen índice igual o superior al anterior.

$$a_1a_1,\quad a_1a_2,\quad \ldots,\quad a_1a_m$$

$$a_2a_2,\quad a_2a_3,\quad \ldots,\quad a_2a_m$$

$$\ldots$$

$$a_ma_m$$

De esta manera vamos añadiendo nuevos elementos hasta llegar a las de orden n-1. Para formar las de orden n, añadimos a cada una de las combinaciones de orden n-1, cada uno de los elementos que tienen índice igual o superior al del último de la combinación de orden n-1.

Queda por demostrar que en la construcción así hecha se encuentran todos los elementos que figuran en la definición y que no hay ninguno más. Es decir que están todos los que son y son todos los que están.

En efecto.

Dada una combinación, formada según la definición anterior, de n elementos, repetidos o no, escogidos de entre m; siempre es posible ordenarla de manera que los elementos con menores índices aparezcan en primer lugar, los elementos con índices iguales aparezcan juntos y los de mayor índice al final. Si la combinación dada, después de ordenarla, no está entre las que hemos construido, al separar el último elemento, que deberá ser uno de los m dados con índice mayor o igual que el penúltimo, la correspondiente combinación de orden n-1, tampoco estará entre las construidas. Pues, si estuviera, al añadirle los elementos que tienen índice igual o superior al último, y en consecuencia éste que hemos separado, también estaría entre las de orden n que hemos construido. Reiterando el razonamiento, vamos separando los últimos elementos hasta llegar a una combinación de orden 1 que no estaría entre las construidas, es decir, el elemento que queda que no es uno de los m, en contra de lo supuesto.

La segunda parte: todos las agrupaciones de n elementos que hemos construido con el método anterior son, evidentemente, agrupaciones de n elementos, repetidos o sin repetir, formados de entre los m dados, y por tanto caen dentro de la definición. Queda por ver que son todos distintos, es decir, que no se repite ninguno. En efecto, los grupos que proceden de la misma combinación de orden n-1, tienen el último elemento distinto; y, los que proceden de distinta combinación de orden n-1, tienen distinto, al menos uno de los n-1 primeros.

Cálculo. Para calcular su número, supongamos el conjunto de las combinaciones ordenadas de menor a mayor índice, y definamos la siguiente correspondencia: A cada combinación le hacemos corresponder una sucesión de α y * , empezando por una α seguida de tantas * como veces se repita el primer elemento, si el primer elemento no apareciera ninguna vez en la combinación, dejaríamos solo una α sin ninguna estrella; a continuación otra α seguida de tantas * como veces se repita el segundo elemento, si éste elemento no apareciera ninguna vez en la combinación, dejaríamos sólo una α sin ninguna estrella; así, hasta el último, que pondríamos una α seguida de tantas * como veces entre el último elemento en la combinación. En total habría m α , una por cada elemento, y n *, una por cada vez que aparezca un elemento en la combinación. Así, a cada combinación le podríamos hacer corresponder una sucesión de m α y n *, empezando siempre por α ; y, recíprocamente, a cada sucesión de m α y n *, que empiece siempre por α , le podemos hacer corresponder una combinación con repetición de m elementos tomados de n en n. Esto se puede entender más claro si nos fijamos en el ejemplo siguiente:

Consideremos los m=5 elementos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ; a la combinación de orden n=4, por ejemplo: $a_2a_2a_3a_3$, le hacemos corresponder: $\alpha\alpha{**}\alpha{**}\alpha\alpha$. Recíprocamente, a la sucesión: $\alpha**\alpha\alpha\alpha\alpha**$, le correspondería la combinación: $a_1a_1a_5a_5$, también de orden 4.

En consecuencia, podemos establecer una correspondencia biunívoca, entre combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n, y sucesiones de m +n –1 elementos de dos clases (no se cuenta el primero, que es fijo y siempre es igual a α) con n * iguales entre sí y m-1, α , también iguales entre sí. Y, como sabemos, esto es igual a:

$$P_{m+n-1}^{(m-1,n)} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}.$$

Por tanto:

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}$$

Esta última forma es la que más se suele utilizar.

Ejemplo: Estudiar las soluciones naturales, incluido el 0, de la ecuación:

x + y + z + t = 30.

Solución:

El número de soluciones viene dado por:

Combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 30 en 30. $\binom{33}{30} = \binom{33}{3} = \frac{33.32.31}{3.2.1}$ = 11.16.31=5456.

[Volver al principio]